Листок 14

Многочлены над $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и над конечными полями. Лемма Гаусса, признак Эйзенштейна, редукционный признак неприводимости

Как всегда, $\mathbb{F}_p$ обозначает поле из p элементов. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ называется *нормированным* (или *унитарным*), если коэффициент при старшей степени x равен 1.

Задача 1 (!). Пусть $\mathbb{K}$ — поле, $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ и $\deg f(x) = 2$ или 3. Докажите, что f приводим над $\mathbb{K}$ если и только если f имеет корни в $\mathbb{K}$. В качестве примера докажите неприводимость многочлена $x^2 + 1 \in \mathbb{F}_7[x]$.

Задача 2 (!). Пусть $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ — многочлен с целыми коэффициентами и $a_n \neq 0$. Докажите, что
- (а) Если $b_1 x + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$ делит f в $\mathbb{Z}[x]$, то b_1 делит a_n, а b_0 делит a_0;
- (б) Примитивный[1] многочлен $b_1 x + b_0$ делит f в $\mathbb{Z}[x]$ если и только если рациональное число $-b_0/b_1$ — корень f;
- (г) Каждый рациональный корень нормированного многочлена является целым.

Задача 3 (Кострикин, 28.2аб)**.** Пользуясь предыдущей заадачей, найдите все рациональные корни многочленов:
- (а) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;
- (б) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;

Задача 4. Пользуясь признаком Эйзенштейна, докажите неприводимость над полем рациональных чисел многочленов:
- (а) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;
- (б) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;
- (в) $x^6 + 30x^5 - 15x^3 + 6x - 120$.

Задача 5. Пользуясь «решетом Эратосфена» и Задачей 1, найдите все нормированные неприводимые многочлены
- (а) степени $\leqslant 4$ в $\mathbb{F}_2[x]$ (частично разбиралось на паре);
- (б) степени $\leqslant 2$ в $\mathbb{F}_3[x]$.

Задача 6. Пользуясь редукционным признаком неприводимости по модулю p (а также Задачей 1), докажите неприводимость над $\mathbb{Q}$ следующих многочленов:
- (а) $x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ (возьмите $p = 3$; заметьте, что $p = 2$ здесь не работает);
- (б) $x^3 + 3x^2 + 2$ (возьмите $p = 5$; заметьте, что $p = 2, 3$ здесь не работают);
- (в) $x^5 + 5x^2 + 1$ (тут подсказки не будет ☹).

Задача 7. Найти НОД(f, g) для следующих многочленов f и g с коэффициентами из указанного поля $\mathbb{K}$:

[1] Напомним, что многочлен из $\mathbb{Z}[x]$ называется примитивным, если его коэффициенты взаимно просты в совокупности.

(а) $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, $f(x) = x^5 + x + 1$, $g(x) = x^6 + x^5 + x^4 + 1$;
(б) $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$, $f(x) = x^8 + 2x^5 + x^3 + x^2 + 1$, $g(x) = 2x^6 + x^5 + 2x^3 + 2x^2 + 2$.

Задача 8. Разложите на неприводимые множители
(а) $x^9 - x$ в кольце $\mathbb{F}_3[x]$;
(б) $x^9 - 1$ в кольце $\mathbb{F}_3[x]$;