СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

- система m линейных уравнений от n переменных.

a_{ij}, b_i — коэффициенты (числа), x_i — неизвестные, $(b_1, \dots, b_m)$ — столбец свободных членов.

Таблицу коэффициентов из m строк и n столбцов

$$\begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \; \cdots \; a_{1n} \\ - - - \\ a_{m1} \; a_{m2} \; \cdots \; a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется МАТРИЦЕЙ СИСТЕМЫ (1), а таблицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \; \cdots \; a_{1n} \mid b_1 \\ - - - \qquad |- \\ a_{m1} \; a_{m2} \; \cdots \; a_{mn} | \; b_m \end{pmatrix}$$

- расширенной матрицей системы (1).

Набор чисел $(c_1, \dots, c_n)$ - РЕШЕНИЕ системы (1),

если
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = b_i$$
для всех $i = 1, \ldots, m$.

Система -

СОВМЕСТНАЯ, если существует решение

НЕСОВМЕСТНАЯ, если решений нет

ОПРЕДЕЛЕННАЯ, если существует единственное решение

НЕОПРЕДЕЛЕННАЯ, если она имеет более одного решения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две системы (от одного и того же числа переменных) ЭКВИВАЛЕНТНЫ. если они либо

1) обе несовместны,

либо

2) любое решение одной из них является решением другой и наоборот.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (системы или ее матрицы)

I типа : прибавление к i-й строке j-й строки, умноженной на какое-либо число λ, набор (i, j, λ) будем называть его параметрами;

II типа: умножение строки на НЕНУЛЕВОЕ число λ, его параметры - (i, λ);

III типа: перестановка двух строк i и j, его параметры - (i,j).

Другими словами, система

$$\left\{\begin{array}{l} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \cdots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{array}\right. \tag{2}$$

получена из системы (1) элементарными преобразованиями

I типа, если

$$\exists\ \lambda, i \neq j :\ a'_{ik} = a_{ik} + \lambda a_{jk}\ \ (\forall\ 1 \leq k \leq n),\ b'_i = \lambda b_i,$$

а при $r \neq k$

$$a'_{rk} = a_{rk},\ b'_r = b_r\ (k = 1, \ldots, n).$$

II типа, если

$$\exists\ \lambda \neq 0 \quad \text{и} \quad i:\ a_{ik} = \lambda a'_{ik},\ k = 1, \ldots, n,\ b'_i = \lambda b_i,$$

$$a_{rk} = a'_{rk},\ k = 1, \ldots, n,\ b'_r = b_r, \quad \text{при} \quad r \neq i$$

III типа, если

$$\exists\ i \neq j:\ a'_{ik} = a_{jk},\ k = 1, \ldots, n,\ b'_i = b_j$$

$$a'_{jk} = a_{ik},\ k = 1, \ldots, n,\ b'_j = b_i$$

ТЕОРЕМА. Если система (2) получена из системы (1) одним или несколькими элементарными преобразованиями, то системы (1) и (2) *эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(c_1, \ldots, c_n)$ - решение системы (1), а система (2) получена из (1) одним из элементарных преобразований. Покажем, что $(c_1, \ldots, c_n)$ - решение и системы (2).

1) (2) получена из (1) элементарным преобразованием I типа (к i-й строке прибавлена j-я с коэффициентом λ). Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a'_{ik} c_k = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + \lambda a_{jk}) c_k = \sum_{k} a_{ik} c_k + \lambda \sum_{k} a_{jk} c_k =$$

$$= b_i + \lambda b_j = b'_i.$$

Другие уравнения не изменились, поэтому $(c_1, \ldots, c_n)$ - решение системы (2).

2) (2) получена из (1) элементарным преобразованием II типа (умножение i-й строки на $\lambda \neq 0$). В этом случае

$$\sum_{k=1}^{n} a'_{ik} c_k = \lambda(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_k) = \lambda b_i.$$

Другие равенства $\sum_k a'_{rk} c_k = b'_r$ очевидны.

3) (2) получена из (1) элементарным преобразованием III типа (перестановка i-й и j-й строк) - все равенства очевидны.

Во всех случаях $(c_1, \ldots, c_n)$ - решение системы (2).

В ОБРАТНУЮ СТОРОНУ

Пусть снова система (2) получена из системы (1) элементарным преобразованием, а $(c_1, \ldots, c_n)$ - решение второй системы.

Заметим, что все элементарные преобразования обратимы. Например, если F - преобразование I типа с параметрами (i, j, λ), то обратное к нему - это тоже элементарное преобразование I типа с параметрами

$(i, j, -\lambda)$. Если F - преобразование 2-го типа с параметрами (i, λ), то обратное к нему - преобразование того же типа с параметрами (i, λ^{-1}). Если же F - преобразование третьего типа, то обратное к нему - это само F.

Следовательно, систему (1) можно получить из системы (2) элементарным преобразованием, а следовательно, как доказано выше, набор $(c_1, \ldots, c_n)$ является решением первой системы.

==============================

МЕТОД ГАУСССА

(метод решения систем линейных уравнений путем последовательного исключения неизвестных)

Расслотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n} \\ - - - \\ a_{m1} \ a_{m2} \ \cdots \ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

ОПР. Первый (самый левый) ненулевой коэффициент a_{1,k_1} первой строки называется *лидером* певой строки, первый ненулевой коэффициент a_{2,k_2} второй строки называется *лидером* второй строки, и т.д.

ОПР. Матрицу A называют ступенчатой, если лидер второй строки стоит строго правее лидера первой строки, лидер третьей строки стоит строго правее лидера второй строки, и т.д. Т.е.

$$k_1 < k_2 < \ldots \ .$$

ТЕОРЕМА. Любая матрица приводится к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований I и III типов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если первый столбец матрицы A не равен нулю, то можно считать, что $a_{11} \neq 0$ (иначе применяем преобразование III типа). Умножая первую строку на коэффициент

$$\lambda_i = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

и прибавляя ее к i-й строке, получаем матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ & - - - & & \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

(Если же первый столбец матрицы A - нулевой, то переходим к преобразованиям подмартицы, полученной из A отбрасыванием первой строки.)

Далее аналогично преобразуем подматрицу матрицы A', образованную ее строками $2, \ldots, m$, и так далее.

$\square$

ОПР. Система линейных уравнений называется *системой ступенчатого вида*, если ее расширенная матрица имеет ступенчатый вид.

СЛЕДСТВИЕ. Любая система линейных уравнений приводится к ступенчатому виду элементарными преобразованиями I и III типов. В частности, любая система эквивалентна системе ступенчатого вида.

ПРИВЕДЕНИЕ системы линейных уравнений (СЛУ) к СТУПЕНЧАТОМУ ВИДУ и называется МЕТОДОМ ГАУССА.

==============================

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАНЕНИЙ

Согласно предыдущему следствию можно считать систему ступенчатой. Обозначим через r число ненулевых строк основной матрицы системы, а через $\widetilde{r}$ - число ненулевых строк ее расширенной матицы. Очевидно, что либо $r = \widetilde{r}$, либо $r = \widetilde{r}+1$. Если $r = \widetilde{r}$, а $a_{1,k_1}, \ldots, a_{r,k_r}$ - лидеры ненулевых строк матрицы СЛУ, то переменные $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ назовем ГЛАВНЫМИ, а все остальные - СВОБОДНЫМИ.

ТЕОРЕМА.

(1) Если $r = \widetilde{r} = n$, то система - определенная;

(2) если $r = \widetilde{r} < n$, то система - неопределенная, а любому набору значений свободных переменных однозначно соответствует набор значений главных переменных;

(3) если $r < \widetilde{r}$, то система несовместна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

(1) Если $r = \widetilde{r} = n$, то число ненулевых уравнений системы равно числу неизвестных. При этом все коэффоциенты $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ - ненулевые. Последнее ненулевое уравнение имеет вид

$$a_{nn}x_n = b_n,$$

откуда однозначно находится x_n. Из предпоследнего уравнения

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1},$$

зная x_n мы однозначно находим x_{n-1}, и так далее

(2) Пусть $r = \widetilde{r} < n$. Зафиксировав значения свободных переменных, мы как и в пункте (1) поднимаясь по системе снизу вверх однозначно находим значения всех главных неизвестных .

(3) Если $r + 1 = \widetilde{r}$, то в системе есть уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = b,$$

где $b \neq 0$. Такая система не имеет решений. $\square$.

Выражение главных неизвестных через свободные называется *общим решением системы.*

СЛЕДСТВИЕ 1. Неопределенная система имеет бесконечно много решений.

Систему называют *однородной*, если $b_1 = \ldots = b_m = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Однородная система всегда совместна. Если число уравнений в ней меньше числа неизвестных, то она имеет НЕНУЛЕВОЕ решение.