АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ множество всех строк $(a_1, \ldots, a_n)$ длины n, где $a_1, \ldots, a_n$ - вещественные числа

ОПЕРАЦИИ В $\mathbb{R}^n$

Сложение строк: $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$.

Умножение на число: $\lambda(a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\mathbb{R}^n$ с заданными операциями называется *аррифметическим векторным пространством*, а его элементы, т.е. сами строки - векторами.

==============================

Пусть $u_1, \ldots, u_m$ - векторы из $\mathbb{R}^n$.

ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ (с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$): вектор $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$

ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА: $< u_1, \ldots, u_m >= \{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n\}$ - совокупность всех линейных комбинаций.

НУЛЕВОЙ ВЕКТОР: $0 = (0 \ldots, 0)$.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторы $u_1, \ldots, u_m$ *линейно зависимы*, если существуют коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, такие, что

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = 0,$$

и хотя бы один из α_i отличен от нуля.

СЛЕДСТВИЕ. Векторы $u_1, \ldots, u_m$ линейно независимы, если равенство $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$ возможн лишь при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$..

================================

ПОДПРОСТРАНСТВО

ОПР. Непустое подмножество W в $\mathbb{R}^n$ называют *подпространством*, если

1) $a + b$ лежит в W для любых $a, b \in W$;

2) $\alpha a \in W$ для ллюбых $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in W$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Линейная оболочка векторов является подпространством.

ТЕОРЕМА (основная лемма о линейной зависимости). Пусть $X_1, \ldots, X_r$ и $Y_1, \ldots, Y_s$ - два набора векторов из $\mathbb{R}^n$. Если векторы $Y_1, \ldots, Y_s$ линейно независимы и выражаются через $X_1, \ldots, X_r$, (т.е. принадлежат их линейной оболочке), то $s \le r$.

Д-ВО. Предположим, что $s > r$. Выразим Y_i-е через X_j-е:

$$\begin{array}{c} Y_1 = a_{11}X_1 + \cdots + a_{r1}X_r \\ \cdots \\ Y_s = a_{1s}X_1 + \ldots + a_{rs}X_r \end{array}.$$

Рассмотрим линейную комбинацию Y_i-х с неизвестными коэффициентами:

$$z_1Y_1+\cdots+z_sY_s = z_1(a_{11}X_1+\cdots+a_{r1}X_r)+\cdots+z_s(a_{1s}X_1+\ldots+a_{rs}X_r) =$$

$$= (a_{11}z_1 + \cdots + a_{1s}z_s)X_1 + \cdots + (a_{r1}z_1 + \cdots + a_{rs}z_s)X_r.$$

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \cdots + a_{1s}z_s = 0 \\ \qquad \cdots \\ a_{r1}z_1 + a_{r2}z_2 + \cdots + a_{rs}z_s = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение (см. СЛЕДСТВИЕ 2), т.к. $r < s$. Но если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ - ее ненулевое решение, то

$$\alpha_1Y_1 + \ldots + \alpha_sY_s = 0,$$

что проиворечит линейной независимости $Y_1, \ldots, Y_s$. Следовательно, s не может быть больше r. $\square$

==============================

БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ

Пусть V - подпространство в $\mathbb{R}^n$, и $e_1, \ldots, e_m \in V$.

ОПР. $e_1, \ldots, e_m$ - базис V, если

1) $e_1, \ldots, e_m$ линейно независимы;
2) $< e_1, \ldots, e_m >= V$ (т.е. любой вектор из V выражается через $e_1, \ldots, e_m$).

ТЕОРЕМА. Пусть V - подпросттранство в $\mathbb{R}^n$, и $\{v_1, \ldots, v_m\}$, $\{u_1, \ldots, u_k\}$ - два базиса V. Тогда $m = k$.

Д-ВО. Т.к. $\{v_1, \ldots, v_m\}$ и $\{u_1, \ldots, u_k\}$ - два базиса V, то $< v_1, \ldots, v_m >=< u_1, \ldots, u_k >$. Отсюда по основной лемме о линейной зависимости $m \leq k$ и $k \leq m$, т.е. $m = k$ $\square$

ТЕОРЕМА. Любая линейно независимая система векторов из подпространства V в $\mathbb{R}^n$ может быть дополнена до базиса V.

Д-ВО. Пусть V - подпространство в $\mathbb{R}^n$ и $v_1, \ldots, v_k$ - набор лннейно независимых векторов из V. Если $< v_1, \ldots, v_k >= V$, то они образуют базис V. Если

$< v_1, \dots, v_k > \neq V$, то найдется вектор $v_{k+1} \in V$, не лежащий в $< v_1, \dots, v_k >$. Покажем, что $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ линейно независимы.

Пусть $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$. Если $\alpha_{k+1} \neq 0$, то v_{k+1} выражается через $v_1, \dots, v_k$, что противоречит выбору v_{k+1}. Если же $\alpha_{k+1} = 0$, то и все остальные $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ тоже равны нулю в силу линейной независимости векторов $v_1, \dots, v_k$.

Если снова $< v_1, \dots, v_k, v_{k+1} > \neq V$, то продолжаем процесс пополнения системы $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$. Он прервется на каком-либо шаге, т.к. по основной лемме о линейной зависимости в $\mathbb{R}^n$ нельзя выбрать больше чем n линейно независимых векторов. $\square$

ОПР. *Размерностью* подпространства V в $\mathbb{R}^n$ называется число векторов в любом базисе V. Она обозначается как $\dim V$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любое подпространство V в $\mathbb{R}^n$ обладает базисом и $\dim V \leq n$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $U \subseteq V$ - два подпространства в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\dim U \leq \dim V$, причем $\dim U = \dim V$ тогда и только тогда, когда $U = V$.

ОПР. Рангом системы векторов $\{a_1, \dots, a_k\}$ из

$\mathbb{R}^n$ называется $\dim < a_1, \ldots, a_k >$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ: $rank\{a_1, \ldots, a_k\}$ или $rk\{a_1, \ldots, a_k\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ранг системы векторов $\{a_1, \ldots, a_k\}$ - это максимальное число линейно независимых векторов среди $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть V - подпространство в $\mathbb{R}^n$ с базисом $e_1, \ldots, e_k$. Тогда любой вектор v из V однозначно выражается в виде:

$$v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k, \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}).$$

Д-ВО. Существование $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ очевидно. Пусть $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_k e_k$. Тогда $(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)e_k = 0$. Отсюда $\alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_k - \beta_k = 0$ и $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k$. $\square$

РАНГ МАТРИЦЫ

ОПР. Прямоугольная таблица из m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ --- & & \\ a_{m1} \ a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется МАТРИЦЕЙ $m \times n$.

<u>СТРОКИ</u> матрицы $m \times n$ - элементы арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

<u>СТОЛБЦЫ</u> матрицы $m \times n$ - элементы арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ
Горизонтальный ранг $rk_\Gamma(A)$ - ранг системы строк A.
Вертикальный ранг $rk_B(A)$ - ранг системы столбцов.

ЛЕММА. Пусть матрица C получена из матрицы A элементарным преобразованием <u>строк</u>. Тогда

1) $rk_\Gamma(C) = rk_\Gamma(A)$;

2) $rk_B(C) = rk_B(A)$.

Д-ВО.

1) Пусть $A_1, \ldots, A_m$ - строки матрицы A, а $C_1, \ldots, C_m$ - строки C. Тогда

$$C_1, \ldots, C_m \in < A_1, \ldots, A_m >,$$

следовательно,

$$< C_1, \ldots, C_m > \subseteq < A_1, \ldots, A_m > .$$

Так как элементарные преобразования обратимы, то и

$$< A_1, \ldots, A_m > \subseteq < C_1, \ldots, C_m > .$$

Следовательно,

$$rk\{A_1, \ldots, A_m\} = \dim < A_1, \ldots, A_m >=$$

$$= \dim < C_1, \ldots, C_m >= rk\{C_1, \ldots, C_m\}.$$

2) Пусть $A^1, \ldots, A^n$ - столбцы матрицы A, а $C^1, \ldots, C^n$ - столбцы C. Покажем, что

$$\forall\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$$

соотношения

$$\lambda_1 A^1 + \ldots + \lambda_n A^n = 0 \qquad (1)$$

и

$$\lambda_1 C^1 + \ldots + \lambda_n C^n = 0 \qquad (2)$$

эквивалентны.

Действительно, (1) означает, что $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ - решение однородной СЛУ с матрицей A, а (2) - что $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ - решение однородной СЛУ с матрицей C. Т.к. C получена из A элементарным преобразованием строк, то эти две СЛУ эквивалентны. Поэтому соотношения (1) и (2) равносильны.

Пусть теперь $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ - максимальная линейно независимая система столбцов матрицы A (т.е. базис пространства $< A^1, \ldots, A^n >$). Тогда $rk\{A^1, \ldots, A^n\} = r$. Кроме того, в силу эквивалентности (1) и (2), столбцы $C^{j_1}, \ldots, C^{j_r}$ тоже линейно независимы и через них выражаются все $C^1, \ldots, C^n$. Следовательно, $C^{j_1}, \ldots, C^{j_r}$ - базис линейной оболочки $< C^1, \ldots, C^n >$ и $rk\{C^1, \ldots, C^n\} = r$. $\square$

ТЕОРЕМА. Ранг матрицы по строкам равен рангу по столбцам.

Д-ВО. Элементарными преобразованиями стррок приведем A к ступенчатому виду:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \dots c_{1k} & \dots & c_{1l} & \dots & c_{1s} & \dots & c_{1n} \\ 0 \quad \dots c_{2k} & \dots & c_{2l} & \dots & c_{2s} & \dots & c_{2n} \\ 0 \quad \dots 0 & \dots & c_{3l} & \dots & c_{3s} & \dots & c_{3n} \\ & \dots & & \dots & & & \\ 0 \quad \dots 0 & \dots & 0 & \dots & c_{rs} & \dots & c_{rn} \\ 0 \quad \dots 0 & \dots & 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

У матрицы C ровно r ненулевых строк, $c_{11}, c_{2k}, c_{3l}, \dots, c_{rs}$ - лидеры строк $1, 2, \dots, r$, а все остальные строки - нулевые. По предыдущей лемме $rk_\Gamma(C) = rk_\Gamma(A)$, $rk_B(C) = rk_B(A)$, поэтому достаточно доказать равенство горизонтального и вертикального рангов матрицы C.

Нетрудно заметить, что первые r строк C линейно независимы. Так как остальные строки - нулевые, то $rk_\Gamma(C) = r$. Заметим также, что столбцы $C^1, C^k, C^l, \dots, C^s$ (их тоже r штук и они соответствуют лидерам строк) тоже линейно нзависимы. Поэтому $rk_B(C) \geq r$. Обозначим через V подпространство в пространстве $\mathbb{R}^n$, которому принадлежат столбцы матрицы C, состоящее из тех векторов-столбцов, у которых только первые r координат могут быть ненулевыми, т.е. столбцов вида

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_r \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Также нетрудно заметить, что $\dim V = r$. Поскольку все столбцы C лежат в V, то и $rk_B(C) \leq r$. Следовательно, $rk_B(C) = r = rk_\Gamma(C)$, и теорема доказана.
$\square$

ОПР. Ранг матрицы: $rk(A) = rk_\Gamma(A) = rk_B(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку при элементарных преобразованиях строк ранг матрицы не меняется, то он равен числу ненулевых строк в ступенчатом виде.

===================================

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ

Пусть A - матрица некоторой системы линейных уравнений, а B - столбец ее свободных членов. Будем использовать для этой системы сокращенную запись: $AX = B$, в которой X - столбец неизвестных.

ТЕОРЕМА. Система $AX = B$ совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной, т.е. $rk\ A = rk(A|B)$.

Д-ВО. В силу предыдущего замечания и эквивалентности систем, получающихся друг из друга при помощи элементарных преобразований, можно считать, что у системы $AX = B$ расширенная матрица $(A|B)$ имеет ступенчатый вид. Обозначим (как и при исследовании систем с помощью метода Гаусса) $r = rk\ A, \widetilde{r} = rk(A|B)$. Как отмечалось при иссле-докании систем, система $AX = B$ совместна тогда и только тогда, когда $r = \widetilde{r}$. $\square$

==================================

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений $AX = 0$ на n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$. Любое ее решение можно рассматривать как вектор-строку из $\mathbb{R}^n$. Тогда совокупность всех ее решений образует подпространство V в $\mathbb{R}^n$.

ОПР. Базис пространства V называется *фундаментальной системой решений* системы $AX = 0$.

ТЕОРЕМА. Размерность V равна $n - rk\ A$.

Д-ВО. Приведем A к ступенчатому виду и разделим все неизвестные на главные и свободные. Число главных неизвестных равно рангу A. Пусть, например, $x_1, \ldots, x_r$ - главные, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ - свободные. Напомним, что любому набору значений свободных переменных соответствует ровно одно решение. Рассмотрим такие решения

$$c_1 = (\underbrace{*, \ldots, *}_{r}, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, c_{n-r} = (\underbrace{*, \ldots, *}_{r}, 0, 0, \ldots, 1).$$

Здесь звездочками обозначены не интересующие нас значения главных неизвестных. Тогда из равенства

$$\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_{n-r} c_{n-r} = (*, \ldots, *, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r})$$

легко следуют и линейная независимость $c_1, \ldots, c_{n-r}$ и тот факт, что через них линейно выражается любое решение системы. Следовательно, $\dim V = n - r$. $\square$