# АЛГЕБРА МАТРИЦ

Сложение, умножение на число

$A$ и $B$ - матрицы $m \times n$, $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$

**ОПР.** $C = A + B$, если $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$, а $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

**ОПР.** $D = \lambda A$, если $D = (d_{ij})$ размера $m \times n$, а $d_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Очевидные свойства: $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

## УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Пусть $A$ - матрица $m \times n$, $B$ - матрица $n \times k$. Тогда определим их произведение $C = AB$ размера $m \times k$:

**ОПР.** $C = AB$, если

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

- элемент $c_{ij}$ равен произведению $i$-й строки матрицы $A$ на $j$-й столбец маnрицы $B$.

## СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ

1) Дистрибутивность. $A, B - m \times n$, $C - n \times k \Rightarrow (A+B)C = AC + BC$

**Д-ВО.** Обозначим $D = (A+B)C, P = AC, Q = BC$. Тогда $p_{ij} = \sum_s a_{is}c_{sj}$, $q_{ij} = \sum_s b_{is}c_{sj}$,

$$d_{ij} = \sum_s (a_{is}+b_{is})c_{sj} = \sum_s a_{is}c_{sj} + \sum_s b_{is}c_{sj} = p_{ij} + q_{ij}$$

АНАЛОГИЧНО: $A(B+C) = AB + AC$.

2)Ассоциативнсть умножения. Пусть $A - m \times n, B - n \times k, C - k \times t$. Тогда $(AB)C = A(BC)$.

**Д-ВО.** Обозначим $P = AB, Q = BC, D = (AB)C = PC, F = A(BC) = AQ$. Тогда

$$d_{ij} = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}c_{rj} = \sum_{r=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sr}\right)c_{rj} = \sum_r \sum_s a_{is}b_{sr}c_{rj} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} a_{is}\left(\sum_{r=1}^{k} b_{sr}c_{rj}\right) = \sum_{s=1}^{n} a_{is}q_{sj} = f_{ij}$$

$\square$

Транспонирование

Если $A$ - матрица из $m$ строк и $n$ столбцов, то $A^t$ - матрица из $n$ строк и $m$ столбцов. Столбцами $A^t$ являются строки $A$. Другими словами,

$$A^t = B, \quad \text{и} \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

3) $(AB)^t = B^t A^t$

**Д-ВО.** Пусть $A$ - размера $m \times n$, а $B$ - $n \times k$. Обозначим $C = AB = (c_{ij}), D = B^t A^t, A^t = (a'_{ij}), B^t = (b'_{ij}), C^t = (c'_{ij})$. Тогда

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki};\ \ d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = c'_{ij}$$

Размеры: $B^t - n \times k, A^t - n \times m \Rightarrow D - k \times m;$
$C - m \times t \Rightarrow C^t - t \times m.$ $\square$

4)$(A^t)^t = A$ - очевидно

==================================

КВАДРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

$M_n(\mathbb{R})$ - множество квадратных матриц $n \times n$

**ОПР.** Матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & ... & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

называется *единичной*

Основное свойство:

$$AE = EA = A \qquad \forall\ \ A \in M_n(\mathbb{R})$$

Д-во. $E = (e_{ij})$, где $e_{ij} = 0 \quad \forall \quad i \neq j, e_{ii} = 1$. Поэтому

$$(AE)_{ij} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{kj} = a_{ij} e_{jj} = a_{ij} = (A)_{ij}$$

($EA$ - аналогично)

Матричные единицы

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & . & & \\ & & . & & \\ o & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & . & & \\ & & . & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$$

- единица стоит на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца $\Rightarrow$ $E = E_{11} + \cdots + E_{nn}$.

==============================

## УМНОЖЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЕДИНИЦ

$$(E_{ij} E_{km})_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{n} (E_{ij})_{\alpha\gamma} (E_{km})_{\gamma\beta} = 0,$$

если $\alpha \neq i$ или $\beta \neq m$, а также при $\alpha = i, \beta = m$, но $j \neq k$. А при $\alpha = i, \beta = m, j = k$ получаем: $(E_{ij}E_{jm})_{im} = 1$. Т.е.

$$E_{ij}E_{km} = \delta_{jk}E_{im}$$

где

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad j \neq k \\ 1, & \text{если} \quad j = k \end{cases}$$

- символ Кронекера

=================================

## ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

**ОПР.** Матрица $B$ называется *обратной* к $A$, если $AB = BA = E$.

Матрица, у которой есть обратная, называется обратимой.
ОБОЗНАЧЕНИЕ: $B = A^{-1}$

## ПРИМЕРЫ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

А матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ необратима, т.к.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

==============================

## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МАТРИЦЫ

Элементарные матрицы I типа: $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$P_{ij}(\lambda) = E + \lambda E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

где $\lambda$ стоит в $(i, j)$-й позиции.

Элементарные матрицы II типа: $\lambda \neq 0$

$$M_i(\lambda) = E + (\lambda - 1)E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Элементарные матрицы III типа: $\qquad i \neq j$

$$Q_{ij} = E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & . & . & . & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица $Q_{ij}$ получена из $E$ перестановкой $i$-й и $j$-й строк.

**ТЕОРЕМА.** Элементарные матрицы обратимы, причем $P_{ij}(\lambda)^{-1} = P_{ij}(-\lambda)$, $M_i(\lambda)^{-1} = M_i(\frac{1}{\lambda})$, $Q_{ij}^{-1} = Q_{ij}$

**Д-ВО.**

1) $(E + \lambda E_{ij})(E - \lambda E_{ij}) = E + \lambda E_{ij} - \lambda E_{ij} + \lambda^2 E_{ij}^2 = E$

2) $M_i(\lambda)M_i(\frac{1}{\lambda}) = (E_{11} + \ldots + \lambda E_{ii} + \cdots + E_{nn})(E_{11} + \ldots + \frac{1}{\lambda}E_{ii} + \cdots + E_{nn}) = E_{11} + \ldots + E_{ii} + \cdots + E_{nn} = E$

3) Обозначим $X = E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$. Тогда $Q_{ij} = E + X$ и $Q_{ij}^2 = E^2 + 2X + X^2$. Вычислим $X^2$:

$$X^2 = (E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj})(E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}) =$$

$$= E_{ii} - E_{ij} + E_{jj} - E_{ji} - E_{ij} + E_{ii} - E_{ji} + E_{jj} =$$

$$= 2E_{ii} - 2E_{ij} + 2E_{jj} - 2E_{ji} = -2X$$

Поэтому $2X + X^2 = 0$ и $Q_{ij}^2 = E$

$\square$

================================

**ТЕОРЕМА.** Пусть $A$ - прямоугольная $m \times n$-матрица, $T$ элементарная $m \times m$-матрица.Тогда умножение слева на $T$ равносильно соответствующему элементарному преобразованию строк матрицы $A$.

**Д-ВО.** Вычислим сначала $E_{ij}A$. Т.к. $A = \sum_{k,l} a_{kl}E_{kl}$, то

$$E_{ij}A = E_{ij}(\sum_k \sum_l a_{kl}E_{kl}) = \sum_l a_{jl}E_{ij}E_{jl} = \sum_l a_{jl}E_{il}.$$

Т.е.

$$E_{ij}A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - i$$

Отсюда

$$(E + \lambda E_{ij})A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ (a_{i1} + \lambda a_{j1}) & \cdots & (a_{in} + \lambda a_{jn}) \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - i,$$

$$M_i(\lambda)A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - i$$

$$Q_{ij}A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ -i \\ \\ -j \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$\square$

<u>ЗАМЕЧАНИЕ.</u> Умножение справа на элементарные матрицы соответствует элементарным преобразованиям столбцов.

==================================

## РАНГ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

**ТЕОРЕМА.** $rk\ AB \leq rk\ A$. Если $B$ - квадратная обратимая матрица, то $rk\ AB = rk\ A$.

**Д-ВО.** Пусть $C = AB$, где $A$ - размера $m \times k$, $B$ - размера $k \times n$. Тогда $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$. Отсюда

$$\begin{pmatrix} c_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ c_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix} b_{1j} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1k} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mk} \end{pmatrix} b_{kj},$$

т.е. любой столбец матрицы $C$ - линейная комбинация столбцов $A^1, \ldots, A^k$ матрицы $A$. Если $C^1, \ldots, C^n$ - столбцы $C$, то $< C^1, \ldots, C^n > \subseteq < A^1, \ldots, A^k >$. Отсюда $rk\, C = \dim < C^1, \ldots, C^n > \leq \dim < A^1, \ldots, A^k > = rk\ A$.

Если $B$ обратима, то $rk\ A = rk\ (AE) = rk\ (ABB^{-1}) \leq rk\ (AB)$. Отсюда $rk\ AB = rk\ A$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. Ранг произведения не превосходит рангов своих сомножителей.

Д-ВО. $rk\ AB \leq rk\ A$ по предыдущей теореме. Крме того, $rk\ C^t = rk\ C$ для любой матрицы $C$. Поэтому $rk\ AB = rk\ (AB)^t = rk\ (B^t A^t) \leq rk\ B^t = rk\ B$. $\square$

==============================

## КРИТЕРИЙ ОБРАТИМОСТИ

Пусть $A$- квадратная матрица $n \times n$.

**ТЕОРЕМА.** Следующие условия эквивалентны:

1) $A$ обратима;

2) $rk\ A = n$;

3) $A$ приводится к единичной матрице элементарными преобразованиями строк.

**Д-ВО.**

1) $\Rightarrow$ 2): т.к. $rk\ E = n$, то $rk\ AA^{-1} \leq rk\ A$. Но $rk\ A \leq n$. Поэтому $rk\ A = n$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $rk\ A = n$. Приведем $A$ к ступенчатому виду $A'$ элементарными преобразованиями строк. Т.к. $rk\ A' = n$, то

$$A' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

- верхнетреугольная матрица, причем лиагональные элементы $b_{11}, \ldots, b_{nn}$ не равны нулю. Вычитая последнюю строку из всех предыдущих с подхоящими коэффициентами, мы обнуляем все элементы последнего столбца, кроме $b_{nn}$. Поднимаясь снизу вверх, мы с помощью элементарных преобразований I типа приводим нашу матрицу к диагональному виду

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $B$ приводится к единичной матрице элементарными преобразованиями II типа.

3) $\Rightarrow$ 1).

Предположим, что $A$ приводима к единичной матрице элементарными преобразованиями строк. Это означает, что существуют элементарные матрицы $T_1, \ldots, T_k$, такие, что

$$T_k \cdots T_1 A = E.$$

Обозначим $B = T_k \cdots T_1$. Тогда $BA = E$. Осталось доказать, что и $AB = E$. Для этого рассмотрим транспонированную матрицу $A^t$. Тогда $rk\ A^t = n$. По предыдущему ( 2) $\Rightarrow$ 3) ) $A^t$ приводится к единичной матрице элементарными преобразованиями строк, т.е. существует матрица $C$, такая что $CA^t = E$. Обозначим $D = C^t$. Тогда $AD = (A^t)^t C^t = (CA^t)^t = E^t = E$.

Имеем: $BA = E = AD$. Отсюда

$$B = BE = B(AD) = (BA)D = ED = D,$$

т.е. $B = D$ и $AB = E$. $\square$