ОПЕДЕЛИТЕЛЬ

ОПР. Пусть A – квадратная матрица $n \times n$. Определителем (или детерминантом) A называется число

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Другими словами, это знакопеременная сумма $n!$ произведений элементов матрицы A. В каждое произведение входит ровно один элемент из любой строки и ровно один элемент из любого столбца. Знак перед произведением опредеяется четностью подстановки σ (или перестановки, которую образуют индексы столбцов)

ПРИМЕР:

$$n = 2 \;\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

======================================

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Теорема. Опредеитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

Д-ВО.Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Тогда $b_{ij} = a_{ji}$ и

$$|B| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Произведение $a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$ перепишем так, чтобы первые индексы, т.е. номера строк, возрастали. Тогда

$$a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}=a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

где $\quad \sigma(i_1)=1,\sigma(i_2)=2,\dots,\sigma(i_n)=n,$ т.е.

$\sigma=\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$. Но тогда $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$

Поэтому $a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}=a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$. Следовательно,

$$|B|=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_\sigma a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_{\sigma^{-1}} a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

т.к. $\varepsilon_\sigma=\varepsilon_{\sigma^{-1}}$. Если обозначить $A_\tau=\varepsilon_\tau a_{1\tau(1)}\cdots a_{n\tau(n)}$, то

$$|B|=\sum_{\sigma\in S_n}A_{\sigma^{-1}} \tag{1}$$

Отображени $\sigma\to\sigma^{-1}$,биективно на S_n. Поэтому для любой подстановки $\tau\in S_n$ слагаемое A_τ в сумме (1) встречается ровно 1 раз. Следовательно,

$$\sum_{\sigma\in S_n}A_{\sigma^{-1}}=\sum_{\tau\in S_n}A_\tau, \text{ т.е. } |B|=\sum_{\tau\in S_n}\varepsilon_\tau a_{1\tau(1)}\cdots a_{n\tau(n)}=|A|$$

$\square$

======================================

Линейность определителя по строкам

Теорема (линейность по i-й строке).

$$1)\ \begin{vmatrix} & a_{11} & & \cdots & & a_{1n} & \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ a_{i1} & + & b_{i1} & \cdots & a_{in} & + & b_{in} \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ & a_{n1} & & \cdots & & a_{nn} & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|A| \qquad\qquad\qquad |A_1| \qquad |A_2|$$

$$2)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Д-ВО.

$$1)\quad \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots (a_{i\sigma(i)} + b_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{sg\in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

т.е. $|A| = |A_1| + |A_2|$.

$$2)\quad \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots \lambda a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \lambda \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \lambda |A|$$

$\square$

==================================

Кососимметричность по строкам

При перестановке строк определитель меняет знак

$$\begin{array}{cc} \\ \\ i & - \\ \\ j & - \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ . & . & . \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ . & . & . \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{cc} \\ \\ - & i \\ \\ - & j \\ \\ \\ \end{array}$$

Д-ВО. Обозначим через A' матрицу с переставленными строками. Тогда

$$|A'| = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{i\sigma(i)} \cdots a'_{j\sigma(j)} \cdots a'_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Обозначим через θ транспозицию (ij). Тогда

$$\sigma\theta = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(j) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & n \end{pmatrix}$$

и $\varepsilon_{\sigma\theta} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\theta = -\varepsilon_\sigma$. Поэтому

$$|A'| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma\theta(1)} a_{2\sigma\theta(2)} \cdots a_{n\sigma\theta(n)}. = -\sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma\theta} \tag{2}$$

где $A_\tau = \varepsilon_\tau a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)}$.

Заметим, что если $\sigma_1 \neq \sigma_2$ то $\sigma_1\theta \neq \sigma_2\theta$ (иначе $\sigma_1\theta\theta = \sigma_1 = \sigma_2\theta\theta = \sigma_2$), и для любой подстановки $\tau \in S_n$ найдется σ, такая, что $\tau = \sigma\theta$. Поэтому в сумме (2) каждое слагаемое $A_\tau, \tau \in S_n$, встречается ровно 1 раз, т.е.

$$|A'| = -\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = -|A|$$

$\square$

СЛЕДСТВИЕ. Если две строки определителя равны, то сам определитель равен нулю.

Еще одно свойство: если одна из строк определителя - нулевая, то определитель равен нулю,

Д-ВО. Следует из линейности определителя (ноль - общий множитель в строке, поэтому $|A| = 0 \cdot |A|$).

==================================

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ КАК ПОЛИЛИНЕЙНАЯ КОСОСИММЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

ОПР. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ со значениями в $\mathbb{R}$ от n векторных аргументов называется <u>полилинейной</u>, если она линейна по каждому из аргументов, т.е.

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha x_i + \beta x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$

$$\alpha f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \beta f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

ОПР. Полилинейная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется <u>кососимметрической</u>, если

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

Лемма. Если f кососимметрична, то

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma f(x_1, \ldots, x_n)$$

Д-ВО. Разложим σ в произведение транспозиций и проведем доказательство индукцией по числу сомножителей.

Если $\sigma = \tau$ - одна транспозиция, утверждение леммы следует из определения кососимметричности, поскольку $\varepsilon_\sigma = -1$.

Пусть $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$, $k > 1$, и для любых $(k-1)$ сомножителей все уже доказано. Обозначим

$$\tau_1 = (ij), \;\; \rho = \tau_2 \cdots \tau_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & a & \cdots & b & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & k_n \end{pmatrix},$$

Тогда

$$\sigma = \tau_1 \rho = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & a & \cdots & b & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & k_n \end{pmatrix}, \;\varepsilon_\sigma = -\varepsilon_\rho$$

и

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(\cdots \underset{a}{x_j} \cdots \underset{b}{x_i} \cdots) = -f(\cdots \underset{a}{x_i} \cdots \underset{b}{x_j} \cdots) =$$

$$= -f(x_{\rho(1)}, \ldots, x_{\rho(n)}) = -\varepsilon_\rho f(x_1, \ldots, x_n) = \varepsilon_\sigma f(x_1, \ldots, x_n)$$

$\square$

==================================

Теорема.

(1) $\det A$ - полилинейная кососимметрическая функция строк матрицы A;

(2) Пусть $f = f(A_1, \ldots, A_n)$ - полилинейная кососимметрическая функция от строк $A_1, \ldots, A_n$ длины n, причем $f(E_1, \ldots, E_n) = 1$, где $E_1, \ldots, E_n$ - строки единичной матрицы. Тогда $f(A_1, \ldots, A_n) = \det A$, где A - матрица со строками $A_1, \ldots, A_n$.

Д-ВО.

Утверждение (1) уже доказано.

Докажем (2). Пусть $A_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, A_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$.

$$E_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$$

то

$$A_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_j. \qquad \text{Поэтому}$$

$$f(A_1, \ldots, A_n) = f(\sum_{i_1} a_{1i_1} E_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n} a_{ni_n} E_{i_n}) =$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_n} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n} f(E_{i_1}, \ldots, E_{i_n}).$$

Ели среди индексов $i_1, \ldots, i_n$ есть два одинаковых, то $f(E_{i_1}, \ldots, E_{i_n}) = 0$. Поэтому

$$f(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{перестановкам } i_1, \ldots, i_n}} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n} f(E_{i_1}, \ldots, E_{i_n})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} f(E_{i_1}, \ldots, E_{i_n}) = (\text{по лемме}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} f(E_{\sigma(1)}, \ldots, E_{\sigma(n)}) = |A|.$$

$\square$

====================================

Изменение определителя при эементарных преобразованиях строк

СЛЕДСТВИЕ (линейности и кососимметричности). Элементарные преобразования строк I типа не изменяют определитель. Элементарные преобразования II типа (умножение строки на λ) приводит к умножению определителя на λ. При перестановке строк определитель меняет знак.

Д-ВО. 1)

$$\begin{vmatrix} . & . & . \\ A_i & + & \lambda A_j \\ . & . & . \\ . & A_j & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} . \\ A_i \\ . \\ A_j \\ . \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} . \\ A_j \\ . \\ A_j \\ . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} . \\ A_i \\ . \\ A_j \\ . \end{vmatrix} = \det A$$

2) и 3) уже доказаны (линейность и коососимметричность)

$\square$

====================================

Д-ВО. Матрица $A = (a_{ij})$ - верхнетреугольгная, если $a_{ij} = 0$ для все $i > j$.

ТЕОРЕМА. Определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению эементов главной диагонали,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Д-ВО.

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Если $\sigma = e$, то произведение равно $a_{11}\cdots a_{nn}$ (знак $+$). Если $\sigma \neq e$, то найдется такой индекс i, что $\sigma(i) < i$ (т.к. если $\sigma(i) \geq i \quad \forall i$, то $\sigma(n) = n, \sigma(n-1) = n-1, \dots, \sigma(1) = 1$). Поэтому

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} = 0$$

для всех $\sigma \neq e$, и $|A| = a_{11}\cdots a_{nn}$. $\square$

====================================

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ С УГЛОМ НУЛЕЙ

Пусть C – матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} A & T \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где A и B – квадратные матрицы размеров $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, а T - размера $m \times n$ (сама C – размера $(m+n) \times (m+n)$). Тогда

ТЕОРЕМА. $|C| = |A||B|$

Д-ВО. Элементарными преобразованиями первых m строк I типа приводим C к виду

$$C' = \begin{pmatrix} A' & T' \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где A' – верхнетреугольная матрица. Далее, элементарными преобразованиями I типа последних n строк приводим C' к виду

$$C'' = \begin{pmatrix} A' & T' \\ 0 & B' \end{pmatrix},$$

где B' – верхнетреугольная матрица. Тогда $|C''| =$

$|C'| = |C|$. Но

$$C'' = \begin{pmatrix} a'_{11} & & & & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & a'_{mm} & & & \\ & & & b'_{11} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & b'_{nn} \end{pmatrix}$$

Поэтому

$$|C| = |C''| = \underbrace{a'_{11} \cdots a'_{mm}}_{|A|} \underbrace{b'_{11} \cdots b'_{nn}}_{|B|} = |A||B|$$

$\square$

==================================

Определитель и линейная независимость строк

<u>ЛЕММА</u>. Если строки матрицы M линейно зависимы, то $\det M = 0$.

Д-ВО. Пусть $M_1, \dots, M_n$ – строки матрицы M, и, например, $M_n = \alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_{n-1} M_{n-1}$. Тогда

$$|M| = \begin{vmatrix} M_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_{n-1} M_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \begin{vmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_1 \end{vmatrix} + \dots + \alpha_{n-1} \begin{vmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

$\square$

<u>ТЕОРЕМА.</u> $\det A = 0 \Leftrightarrow$ строки A линейно зависимы.

Д-ВО. Если строки A линейно зависимы, то $\det A = 0$ (по лемме).

Пусть теперь строки матрицы A размера $n \times n$ линейно независимы. Тогда $rank\ A = n$, и A элементарными преобразованиями строк приводится к единичной матрице E. При каждом таком преобразовании $\det A$ либо не меняется, либо умножается на ненулевой скаляр. Поэтому

$$\alpha|A| = |E| = 1$$

для некоторого $\alpha \neq 0$. Отсюда $|A| \neq 0$. $\square$

==================================

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

<u>ТЕОРЕМА</u>. $|AB| = |A||B|$

Д-ВО. Пусть A и B – матрицы $n \times n$. Обозначим $C = A \cdot B$.

Пусть сначала $rank\ A < n$. тогда $rank\ C \leq rank\ A < n$.

По предыдущей теореме $|A| = 0, |C| = 0$, поэтому $|AB| = |A||B|$.

Пусть теперь $rank\ A = n$. Тогда $|A| \neq 0$. По критерию обратимости существуют элементарные матрицы $T_1, \dots, T_k$, такие что $T_1 \cdots T_k A = E$. Рассмотим дробь $\frac{|AB|}{|A|}$.

Если совершить одно и то же элементарное преобразование строк с A и с AB, то $\frac{|AB|}{|A|}$ не меняется, т.е. для любой элементарной матрицы T выполняется равенство

$$\frac{|TAB|}{|TA|} = \frac{|AB|}{|A|}.$$

Поэтому

$$\frac{|AB|}{|A|} = \frac{|T_k AB|}{|T_k A|} = \dots = \frac{|T_1 \cdots T_k AB|}{|T_1 \cdots T_k A|} = \frac{|B|}{|E|} = |B|,$$

т.к. $|E| = 1$, а $T_1 \cdots T_k A = E$. Следовательно, $|AB| = |A||B|$. □

==================================

МИНОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

ОПР. Минор порядка k матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- это определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием $n-k$ строк и $n-k$ столбцов. Например, M_{ij} – это определитель, полученный вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

———————————————————-

Алгебраические дополнения

Рассмотрим определитель

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

В каждом произведении $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ есть элемент i-й стоки, причем только один. Разобьем слагаемые на n групп – с сомножителем a_{i1}, с сомножителем a_{i2} и т.д. Тогда

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}. \tag{3}$$

ОПР. Выражение A_{ij} называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij}.

ТЕОРЕМА. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Д-ВО. Представим i-ю строку матрицы A в виде суммы n строк

$$(a_{i1}, 0, \ldots, 0) + (0, a_{i2}, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, a_{in}).$$

Тогда в силу линейности определителя по строкам

$$|A| = \Delta_1 + \cdots + \Delta_n, \tag{4}$$

где

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поменяем в этом определителе местами i-ю строку со всеми строками, стоящими ниже, а затем поменяем местами j-й столбец со всеми столбцами, стоящими правее. В силу кососимметричности определителя по строкам и столбцам получаем:

$$\Delta_j = (-1)^{n-i+n-j}\Delta'_j = (-1)^{i+j}\Delta'_j, \qquad (5)$$

где

$$\Delta'_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \end{vmatrix}$$

а в левом верхнем углу стоит матрица размера $(n-1)\times(n-1)$, полученная из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Ее определитель равен минору M_{ij} матрицы A. По теореме об определителе с углом нулей

$$\Delta'_j = a_{ij}M_{ij}.$$

Отсюда, учитывая (4) и (5), получаем:

$$|A| = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in}. \quad (6)$$

Сравнивая множители при a_{ij} в (3) и в (6), получаем:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

□

СЛЕДСТВИЕ 1. Разложение определителя по i-й строке.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

□

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как $\det A = \det A^t$, то определитель аналогично раскладывается и по j-му столбцу:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Фальшивое разложение

Пусть $k \neq i$. Тогда

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0.$$

Д-ВО. Заменим в матрице A строку k на i-ю строку. Получим матрицу A' с двумя одинаковыми строками. Раскроем $\det A'$ по k-й строке:

$$0 = |A'| = \sum_{j=1}^{n} a'_{kj} A'_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0.$$

$\square$

СЛЕДСТВИЕ 3. Формула обратной матрицы.

Пусть $|A| \neq 0$, и $B = A^{-1} = (b_{ij})$. Тогда $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$.

Д-ВО. Рассмотрим матрицу B с элементами $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$ и покажем, что $AB = E$. Вычислим (ik)-й элемент AB:

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \frac{1}{|A|} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} \right) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}$$

$\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. Следующие условия эквивалентны (для матрицы $n \times n$):

1) A обратима,

2) $rank\ A = n$,

3) A приводится к E элементарными преобразованиями строк,

4) $|A| \neq 0$

5) строки A линейно независимы.

Д-ВО. $1), 2), 3)$ эквивалентны по доказанному ранее критерию обратимости, 4) и 5) эквивалентны по одной из предыдущих теорем. Из 1) следует 4), т.к. если $AB = E$, то $|A||B| = 1$, следовательно, $\det A \neq 0$. Из 4) следует 1) по Следствию 3. $\square$

==============================

РАНГ И МИНОРЫ

Пусть A – прямоугольная матрица размера $m \times n$.

<u>ТЕОРЕМА</u>. Ранг матрицы равен размеру наибольшего отличного от нуля минора.

Сначала докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА. Элементарные преобразования строк (столбцов) III типа не меняют максимальный размер ненулевого минора.

Д-ВО. Пусть A' получена из A перестановкой строк i и t. Если M – минор матрицы A, стоящий на пересечении строк $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, \ldots, j_k$, то возможны 3 случая.

1) $i, t \neq i_1, \ldots, i_k \Rightarrow$ у A' есть ненулевой минор M' в пересечении тех же строк и столбцов, что и у A ($M' = M$).

2) $i, t \in \{i_1, \ldots i_k\} \Rightarrow$ минор M' у A' на пересечении строк $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, \ldots, j_k$ равен минус M, т.е. $M' \neq 0$.

3) $i \in \{i_1, \ldots i_k\}$, например, $i = i_1$, а $t \notin \{i_1, \ldots i_k\}$. Тогда нужно у A' взять пересечение строк $t, i_2, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, \ldots, j_k$. Получим $M' = \pm M \neq 0$ (т.к. строки M' – это переставленные строки M).

Следовательно, максимаьный размер ненулевого минора не уменьшается. Но так как элементарные преобразования III типа обратимы, то он не может и увеличиться. ЛЕММА ДОКАЗАНА.

Д-ВО ТЕОРЕМЫ. Пусть k – максимальный размер ненулевых миноров A. и $M \neq 0$ стоит на пересечении строк $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, \ldots, j_k$. Если строки $i_1, \ldots, i_k$ матрицы A линейно зависимы, то линейно зависимы и строки M. Но тогда $M = 0$, противоречие. Следовательно, у A есть k линейно независимых строк и $rank\ A \geq k$.

Покажем теперь, что ранг A не превосходит k.

Для этого переставим строки и столбцы A так, чтобы ненулевой минор стоял в левом верхнем углу A. Те. считаем, что

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ . & \cdots & . \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ . & \cdots & . \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а все миноры A порядка $> k$ равны нулю. Рассмотрим такой минор, в котором $j \geq k+1$, а i – любое

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1j} \\ . & \cdots & . & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

(он равен нулю, потому что при $i \geq k+1$ это минор порядка $k+1$ матрицы A, а при $i \leq k$ у него две одинаковые строки). Раскроем его по последней строке:

$$0 = a_{i1}T_{j1} + \cdots + a_{ik}T_{jk} + a_{ij}\Delta.$$

При этом $T_{j1}, \ldots, T_{jk}$ зависят от $a_{11}, \ldots, a_{1k}, \ldots, a_{k1}, \ldots, a_{kk}$, $a_{1j}, \ldots, a_{kj}$, но не зависят от $a_{i1}, \ldots, a_{ik}, a_{ij}$. Т.к. $\Delta \neq$

0, то
$$a_{ij} = \lambda_{j1} a_{i1} + \cdots + \lambda_{jk} a_{ik},$$
где $\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{jk}$ не зависят от i, т.е.
$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \lambda_{j1} \begin{pmatrix} a_{11} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_{jk} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$
Это зачит что все столбцы выражаются через первые k столбцов, и $rkA \leq k$. $\square$