ЛЕКЦИЯ 10

ОБЪЕМ n-МЕРНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Объем параллелепипеда.

Ничто не мешает сейчас ввести общее понятие определителя, обобщающее уже пройденные определители для матриц размера 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

и

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Однако мы попытаемся на время забыть о нашей задаче и обратимся к вычислению объемов простейших геометрических фигур — параллелепипедов.

Квадратной матрице (a_{ij}) порядка n поставим в соответствие *параллелепипед*

$$\Pi(A) = \Pi(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}),$$

ребра которого задаются столбцами матрицы $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$, т. е. векторами (или точками)

$$A^{(j)} = [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}] \in \mathbb{R}^n.$$

Под $\Pi(A)$ нужно понимать подмножество в $\mathbb{R}^n$, состоящее из всех точек вида

$$x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)}, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1.$$

При $n = 1$ параллелепипед — это привычный нам отрезок, при $n = 2$ — параллелограмм, при $n = 3$ — обычный трехмерный параллелепипед.

Объем $v(\Pi(A))$ n-мерного параллелепипеда определяется по индукции как произведение объема

$$v(\Pi(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n-1)}))$$

$(n-1)$-мерного основания в $\mathbb{R}^{n-1}$ и длины h перпендикуляра $A^{(n)}P$, опущенного на гиперплоскость этого основания из точки $A^{(n)}$.

Под объемом отрезка понимается его длина, под объемом параллелограмма — его площадь. Не будем сейчас уходить в точные определения и подробности, так как это не относится напрямую к теме.

Пусть в двумерном случае есть параллелограмм, задаваемый матрицей

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тогда его площадь равна удвоенной площади треугольника, вершинами которого являются точки $(0, 0)$, (a, b) и (c, d).

Мы знаем, что площадь треугольника равна половине произведения длин двух соседних его сторон на синус угла между ними, то есть площадь параллелограмма —

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\varphi.$$

При этом угол φ равен разности углов, которые образуют с осью Ox векторы (a, b) и (c, d), косинусы и синусы этих углов равны

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}},\ \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}.$$

При этом известно, что

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha.$$

Подставим все это в формулу:

$$\Pi(A) =$$
$$= \left|\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}\right)\right| =$$
$$= |ad - bc|.$$

Получился модуль двумерного определителя.

Трехмерную ситуацию не будем разбирать подробно, так как это очень длинно и вычислительно, но тоже получится, что объем параллелепипеда равен модулю определителя.

Соблазнительно было бы сохранить формулы вычисления объема через определитель без оговорок на знак, то есть при любом расположении точек $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$, но это возможно только в том случае, если пользоваться понятием *ориентированного объема* параллелепипеда с допустимыми отрицательными значениями.

В частности, для отрезка с отрицательным концом $a < 0$ ориентированной длиной будет как раз число a.

Для параллелограмма $\Pi(A^{(1)}, A^{(2)})$ площадь берется со знаком плюс, если упорядоченная пара векторов $A^{(1)}, A^{(2)}$ задает ту же ориентацию плоскости, что и базисная пара векторов $(e_1, e_2) = ([1, 0], [0, 1])$, в противном случае — со знаком минус.

При таком подходе стоит продолжить логику и называть ориентированным объемом параллелепипеда, натянутого на векторы $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$, его объем со знаком, где знак выбирается в зависимости от того, будет ли набор вектор задавать ту же ориентацию пространства, что и обычный упорядоченный базис.

Обратим внимание на проверяемые свойства ориентированного объема параллелепипеда:

(1) $v(\Pi(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(i)}, A^{(i+1)}, \ldots, A^{(n)}) = -v(\Pi(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(i+1)}, A^{(i)}, \ldots, A^{(n)})$;

(2) $v(\Pi(A^{(1)}, \ldots, \lambda A^{(i)} + \mu B^{(i)}, \ldots, A^{(n)}) = \lambda v(\Pi(A^{(1)}, \ldots, A^{(i)}, \ldots, A^{(n)}) + \mu v(\Pi(A^{(1)}, \ldots, B^{(i)}, \ldots, A^{(n)})$;

(3) $v(\Pi([1, 0, 0, \ldots, 0], [0, 1, 0, \ldots, 0], \ldots, [0, 0, 0, \ldots, 0, 1])) = 1.$

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— это число (или выражение), которое определяется по формуле

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \dots a_{n,\sigma_n}.$$

Другими словами, *определителем* $\det A$ матрицы (a_{ij}) называется алгебраическая сумма всевозможных произведений коэффициентов a_{ij}, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. В каждом произведении сомножители записываются в порядке следования строк, а номера столбцов определяются образами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ номеров строк при перестановке $\sigma \in S_n$. Всего под знаком суммы стоит $n!$ слагаемых; слагаемый, отвечающие четным перестановкам, входят со знаком плюс, а отвечающие нечетным перестановкам — со знаком минус.

Основные свойства определителей

Этих свойств немного, но они для нас важны.

Как и раньше, будем обозначать строки матрицы A как

$$A_{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

а столбцы — как

$$A^{(j)} = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}] \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Соответственно, саму матрицы мы представим как объединение или строк, или столбцов:

$$A = [A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(n)}] = (A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}).$$

Произвольную функцию

$$\Phi : [A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}] \mapsto \Phi(A_{(1)}, \ldots, A_{(n)})$$

мы будем называть *полилинейной*, если она линейна по каждому аргументу $A_{(i)}$, то есть

$$\Phi(A_{(1)}, \ldots, \alpha A'_{(i)} + \beta A''_{(i)}, \ldots, A_{(n)}) =$$
$$= \alpha\Phi(A_{(1)}, \ldots, A'_{(i)}, \ldots, A_{(n)}) + \beta\Phi(A_{(1)}, \ldots, A''_{(i)}, \ldots, A_{(n)}).$$

Та же функция Φ называется *кососимметрической*, если

$$\Phi(A_{(1)}, \dots, A_{(i)}, A_{(i+1)}, \dots, A_{(n)}) = \\ = -\Phi(A_{(1)}, \dots, A_{(i+1)}, A_{(i)}, \dots, A_{(n)}), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Замечание 1. Из определения линейных функций можно заключить, что функция Φ полилинейна ровно тогда, когда при фиксированных $A_{(1)}, \dots, A_{(i-1)}, A_{(i+1)}, \dots, A_{(n)}$ и при

$$A_{(i)} = X = (x_1, \dots, x_n)$$

мы имеем

$$\Phi(A_{(1)}, \dots, A_{(n)}) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — скаляры, не зависящие от $x_1, \dots, x_n$.

Замечание 2. Кососимметричность полилинейной функции Φ эквивалентна выполнению соотношений

$$\Phi(A_{(1)}, \dots, A_{(i-1)}, X, X, A_{(i+2)}, \dots, A_{(n)}) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

В самом деле, положив $A_{(i)} = A_{(i+1)} = X$ в соотношении полилинейности, мы придем к нужному нам условию.

Обратно, при $X = A_{(i)} + A_{(i+1)}$ из выписанного соотношения для Φ вытекает

$$\begin{aligned}\Phi(\dots, A_{(i)}, A_{(i)}, \dots) + \Phi(\dots, A_{(i+1)}, A_{(i+1)}, \dots) + \\ + \Phi(\dots, A_{(i)}, A_{(i+1)}, \dots) + \Phi(\dots, A_{(i+1)}, A_{(i)}, \dots) = \\ = \Phi(\dots, A_{(i)} + A_{(i+1)}, A_{(i)} + A_{(i+1)}, \dots) = 0.\end{aligned}$$

Понятно, что первые два слагаемых равны нулю, откуда получается соотношение полилинейности.

Те же определения и замечания относятся к функции

$$\Phi(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$$

векторов-столбцов.

Получим связь определителя матрицы и транспонированной матрицы:

Теорема 1. *Определители любой квадратной матрицы A и транспонированной матрицы A^T совпадают:*

$$\det A^T = \det A.$$

Доказательство. Положив $A = (a_{ij})$ и $A^T = (a'_{ij})$, где $a'_{ij} = a_{ij}$, и заметив, что $k = \pi(\pi^{-1}k)$ для любой перестановки $\pi \in S_n$ и для любого номера $k = 1, 2, \ldots, n$, мы видим, что упорядочение множителей произведения

$$a'_{1,\pi_1} \ldots a'_{n,\pi_n}$$

в соответствии с перестановкой π^{-1} дает

$$a'_{1,\pi_1} \ldots a'_{n,\pi_n} = a'_{\pi^{-1}(1),\pi(\pi^{-1}(1))} \ldots a'_{\pi^{-1}(n),\pi(\pi^{-1}(n))} = \\ = a'_{\pi^{-1}(1),1} \ldots a'_{\pi^{-1}(n),n} = a_{1,\pi^{-1}(1)} \ldots a_{n,\pi^{-1}(n)}.$$

Учтем еще, что знаки взаимно обратных перестановок совпадают.

Значит, в формуле определителя имеем

$$\det A^T = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, a'_{1,\pi_1} \ldots a'_{n,\pi_n} = \\ = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi^{-1} a'_{1,\pi^{-1}(1)} \ldots a'_{n,\pi^{-1}(n)} = \\ = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1,\sigma_1} \ldots a_{n,\sigma_n} = \det A.$$

$\square$

Замечание 3. Утверждение предыдущей теоремы интерпретируется так: если для определителей выполнено какой-то свойство относительно строк (столбцов), то оно имеет место относительно столбцов (строк).

Теорема 2. *Функция $A \mapsto \det A$ на множестве $M_n(\mathbb{R})$ обладает следующими свойствами:*

(1) $\det A$ — *кососимметрическая функция строк матрицы A (то есть при перестановке местами любых двух строк определитель меняет знак на противоположный);*

(2) $\det A$ — *полилинейная функция строк матрицы A (то есть определитель матрицы A является линейной функцией элементов любой ее строки $A_{(k)}$);*

(3) $\det E = 1$.

Доказательство. (1) Пусть A' — матрица, полученная из A перестановкой строк $A_{(s)}$, $A_{(t)}$, то есть

$$A'_{(s)} = A_{(t)}, \quad A'_{(t)} = A_{(s)}$$

и

$$A'_{(i)} = A_{(i)} \text{ при } i \neq s, t.$$

Запишем теперь любую перестановку $\pi \in S_n$ как произведение $\pi = \sigma\tau$, где τ — это транспозиция (s, t).

Распишем выражение для определителя:

$$\det A' = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi a'_{1,\pi_1}\dots a'_{n,\pi_n} =$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\tau a'_{1,\sigma\tau(1)}\dots a'_{s,\sigma\tau(s)}\dots a'_{t,\sigma\tau(t)}\dots a'_{n,\sigma\tau(n)} =$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\tau a'_{1,\sigma_1}\dots a'_{s,\sigma_t}\dots a'_{t,\sigma_s}\dots a'_{n,\sigma_n} =$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\tau a_{1,\sigma_1}\dots a_{t,\sigma_t}\dots a_{s,\sigma_s}\dots a_{n,\sigma_n} =$$
$$= -\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma a_{1,\sigma_1}\dots a_{n,\sigma_n} = -\det A.$$

(1) Пусть $A = (a_{ij})$ и пусть $A_{(k)} = \lambda' A'_{(k)} + \lambda'' A''_{(k)}$, где штрихи указывают на вспомогательные матрицы

$$A' = [A_{(1)}\dots, A_{(k-1)}, A'_{(k)}, A_{(k+1)}, \dots, A_{(n)}]$$

и

$$A'' = [A_{(1)}\dots, A_{(k-1)}, A''_{(k)}, A_{(k+1)}, \dots, A_{(n)}].$$

По условию

$$a_{kj} = \lambda' a'_{kj} + \lambda'' a''_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

По определению

$$\det[A_{(1)}, \dots, A_{(k)}, \dots, A_{(n)}] = \det A =$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma a_{1,\sigma_1}\dots a_{k,\sigma_k}\dots a_{n,\sigma_n} = \sum_{\sigma\in S_n} p_\sigma a_{k,\sigma_k},$$

где p_σ, $\sigma \in S_n$, — коэффициенты, не зависящие от элементов строки $A_{(k)}$.

Собирая подобные члены, отвечающие тем $\sigma \in S_n$, для которых $\sigma(k) = j$, и полагая

$$\alpha_j = \sum_{\sigma(k)=j} p_\sigma,$$

получим свойство линейности

$$\det[\ldots, A_{(k)}, \ldots] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{kj},$$

откуда

$$\begin{aligned}\det[\ldots, \lambda' A'_{(k)} + \lambda'' A''_{(k)}, \ldots] = \\ = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\lambda' a_{kj} + \lambda'' a''_{kj}) = \lambda' \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a'_{kj} + \sum_{j=1}^{n} \lambda'' \alpha_j a''_{kj} = \\ = \lambda' \det[\ldots, A'_{(k)}, \ldots] + \lambda'' \det[\ldots, A''_{(k)}, \ldots].\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\det A = \lambda' \det A' + \lambda'' \det A''.$$

(3) Очевидно,

$$\det E = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{1,\sigma_1} \ldots \delta_{n,\sigma_n} = \operatorname{sgn} e \, \delta_{1,1} \ldots \delta_{n,n} = 1.$$

$\square$

Из этой теоремы вытекает несколько простых утверждений, которые мы сформулируем в виде свойств определителей, но доказывать будем для более общей ситуации — любой функции $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, обладающей свойствами (1)–(3).

(4) Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\det \lambda A = \lambda^n \det A.$$

Доказательство. Действительно, в силу свойства (2), примененного последовательно к строкам с номерами $1, 2, \ldots,$ имеем

$$\begin{aligned}
&\Phi(\lambda A) = \Phi[\lambda A_{(1)}, \lambda A_{(2)}, \ldots, \lambda A_{(n)}] = \\
&\quad = \lambda\Phi[A_{(1)}, \lambda A_{(2)}, \ldots, \lambda A_{(n)}] = \lambda^2\Phi[A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, \lambda A_{(n)}] = \ldots \\
&\qquad \cdots = \lambda^n\Phi[A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(n)}] = \lambda^n \det A.
\end{aligned}$$

□

(5) *Определитель матрицы с нулевой строкой равен нулю.*

Доказательство. Пусть, например, $A_{(k)} = (0, 0, \ldots, 0)$. Тогда и $2A_{(k)} = (0, 0, \ldots, 0)$. Следовательно, по (2)

$$\begin{aligned}
&\Phi(A) = \Phi[A_{(1)}, \ldots, A_{(k)}, \ldots, A_{(n)}] = \Phi[A_{(1)}, \ldots, 2A_{(k)}, \ldots, A_{(n)}] = \\
&\qquad = 2\Phi[A_{(1)}, \ldots, A_{(k)}, \ldots, A_{(n)}] = 2\Phi(A),
\end{aligned}$$

откуда $\Phi(A) = 0$. □

(6) *Если в квадратной матрице A две строки совпадают, то ее определитель равен нулю.*

Доказательство. Возьмем опять произвольную функцию Φ со свойствами (1)–(2).

Поменяв местами две совпадающие строки $A_{(s)}$ и $A_{(s)}$, мы получим ту же матрицу A. С другой стороны, определитель должен был поменять знак. Значит, он нулевой. $\square$

(7) *Определитель не меняется, если над его строками совершать элементарные преобразования типа* II.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай применения одного элементарного преобразования. Пусть после прибавления к s-й строке матрицы A ее t-й строки, умноженной на λ, получилась матрицы A'.

Тогда по свойствам (1) и (6) для Φ имеем

$$\Phi(') = \Phi[A_{(1)}, \dots, A_{(s)} + \lambda A_{(t)}, \dots, A_{(t)}, \dots] =$$
$$= \Phi[A_{(1)}, \dots, A_{(s)}, \dots, A_{(t)}, \dots] + \lambda\Phi[A_{(1)}, \dots, A_{(t)}, \dots, A_{(t)}, \dots] =$$
$$= \Phi[A_{(1)}, \dots, A_{(s)}, \dots, A_{(t)}, \dots] = \Phi(A).$$

$\square$

Замечание 4. Проведенные доказательства показывают, что любая функция $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ со свойствами (1)–(2) обладает также свойствами (4)–(7).

Предложение 1. *Пусть*

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \ldots & \overline{a}_{1n} \\ 0 & \overline{a}_{22} & \ldots & \overline{a}_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

— верхняя треугольная матрица порядка n*,* E *— единичная матрица и* $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *— любая функция, обладающая свойствами (1)–(2). Тогда*

$$\Phi(\overline{A}) = \Phi(E)\overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\ldots\overline{a}_{nn}.$$

Доказательство. Мы уже понимаем, что можем опираться на свойства (2) и (7). На основании (2) вынесем $\overline{a}_{nn}$ за знак Φ:

$$\Phi(\overline{A}) = \overline{a}_{nn}\Phi\begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \ldots & \overline{a}_{1n} \\ 0 & \overline{a}_{22} & \ldots & \overline{a}_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Применим теперь к $\overline{A}$ серию элементарных преобразований типа II — будем вычитать для каждой i-й строки, $1 \leqslant i < n$, последнюю строчку, умноженную на $\overline{a}_{in}$.

При этом все элементы последнего столбца, кроме последнего, обратятся в ноль, все другие элементы матрицы останутся без изменения.

Применим то же самое рассуждение к предпоследней строке вновь полученной матрицы, и т. д.

Каждый раз очередной элемент $\overline{a}_{ii}$ выносится за знак Φ и рассуждение возобновляется.

В конце концов получим искомую формулу. $\square$

Следствие 1. *Если A — верхнетреугольная матрица, то*

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Доказанные свойства дают возможность сравнительно легко вычислять определитель матрицы порядка n.

Один из методов заключается в следующем.

Матрицу (a_{ij}) следует привести элементарными преобразованиями к треугольному виду. Пусть мы получим треугольную матрицу $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$. Предположим, что в процессе приведения было применено q элементарных преобразований типа I и сколько-то элементарных преобразований типа II. Так как вторые не меняют определитель вообще, а первые меняют его знак, то

$$\det A = (-1)^q \det \overline{A}.$$

Таким образом,

$$\det A = (-1)^q \overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\dots\overline{a}_{nn}.$$

Это из есть одна из формул вычисления определителя.

Теорема 3. *Пусть* $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *— функция, обладающая следующими свойствами:*

(1) при перестановке местами любых двух соседних строк матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ *значение функции* Φ *меняет знак;*

(2) $\Phi(A)$ *является линейной функцией элементов каждой строки матрицы* A*.*

Тогда

$$\Phi(A) = \Phi(E) \cdot \det A.$$

Доказательство. Как мы знаем, свойство (1) эквивалентно тому, что $\Phi(A)$ меняет знак на противоположный при перестановке любых двух строк, то есть при любом элементарном преобразовании типа I.

Как мы уже показывали, это означает, что $\Phi(A)$ обладает свойствами (4)–(7).

В частности, $\Phi(A)$ не меняется, если матрицу A подвергнуть элементарному преобразованию типа II.

Приведем матрицу A при помощи элементарных преобразований к треугольному виду, где, конечно, некоторые элементы на диагонали могут равняться нулю.

С учетом вышесказанного мы имеем формулы

$$\det A = (-1)^q \det \overline{A} = (-1)^q \overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\ldots\overline{a}_{nn}$$

и

$$\Phi(A) = (-1)^q \Phi(\overline{A}),$$

где q — число элементарных преобразований типа I, совершенных при переходе от A к $\overline{A}$.

Однако мы уже доказывали, что для верхнетреугольных матриц и функции Φ, удовлетворяющей свойствам (1)–(2), верно, что

$$\Phi(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}\Phi(E).$$

Таким образом, теорема доказана. $\square$

Итак, свойствами (1)–(3) функция det характеризуется однозначно.

Замечание 5. Заметим, что теперь нами доказано, что определитель матрицы совпадает с ориентированным объемом параллелепипеда, натянутого на столбцы этой матрицы, так как определитель задается теми же аксиомами, которые являются свойствами объема.