ЛЕКЦИЯ 11

РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО СТРОКЕ ИЛИ СТОЛБЦУ

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ С УГЛОМ НУЛЕЙ

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО СТРОКЕ ИЛИ СТОЛБЦУ

Определение 1. Определитель матрицы, получающейся из $A = (a_{ij})$ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, обозначается M_{ij} и называется *минором* матрицы A, соответствующим элементу a_{ij}.

Величина $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij}.

Предложение 1. *Если*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$\det A = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}.$$

Доказательство. Так как $\det A = \det A^T$ и так как a_{11} — единственный отличный от нуля элемента первого столбца $A^{(1)}$, то $a_{\pi_1,1} = 0$ при $\pi(1) \neq 1$ и

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{\pi_1,1} a_{\pi_2,2} \dots a_{\pi_n,n} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n, \pi(1)=1} \operatorname{sgn} a_{1,1} a_{\pi_2,2} \dots a_{\pi_n,n}.$$

Совокупность всех перестановок $\pi \in S_n$, оставляющих на месте символ 1, отождествляется с множеством S_{n-1} перестановок, действующих на множестве $\{2, 3, \dots, n\}$. Таким образом,

$$\det A = a_{11} \cdot \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma a_{\sigma_2,2} \dots a_{\sigma_n,n} =$$

$$= a_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} M_{11}.$$

$\square$

Теорема 1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Справедливы следующие формулы:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(разложение определителя по элементам j-го столбца);

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(разложение определителя по элементам i-й строки).

Иначе говоря, определитель матрицы A равен сумме произведений всех элементов некоторого столбца (некоторой строки) на их алгебраические дополнения.

Доказательство. Опираясь на основные свойства (1) и (2) определителей (сначала относительно строк, а потом — относительно столбцов), выпишем цепочку равенств:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \hdotsfor{7} \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ \hdotsfor{7} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \hdotsfor{7} \\ a_{ij} & a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(j-1)+(i-1)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

Таким образом, первая формула доказана.

2) Положим теперь $A^T = (a'_{ij})$, где $a'_{ji} = a_{ij}$,

Заметим еще, что минором, соответствующим элементу a'_{ji} в $\det A^T$, будет $M'_{ji} = M_{ij}$. Как было показано выше,

$$\det A = \det A^T = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a'_{ji} M'_{ji} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$

то есть мы пришли ко второй формуле. $\square$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ СПЕЦИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Чем больше нулей среди элементов матрицы A и чем лучше они расположены, тем легче вычислять определитель $\det A$.

Например, мы знаем, что определитель треугольной матрицы (нижней или верхней) равен произведению диагональных элементов.

Докажем теорему, которая очень похожа на теорему об аксиоматическом задании определителя:

Теорема 2. *Пусть $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ — функция, обладающая следующими свойствами:*

(1) при перестановке местами любых двух соседних строк матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ значение функции Φ меняет знак;

(2) $\Phi(A)$ является линейной функцией элементов каждой строки матрицы A.

Тогда

$$\Phi(A) = \Phi(E) \cdot \det A.$$

Доказательство. Как мы знаем, свойство (1) эквивалентно тому, что $\Phi(A)$ меняет знак на противоположный при перестановке любых двух строк, то есть при любом элементарном преобразовании типа I.

Как мы уже показывали, это означает, что $\Phi(A)$ обладает свойствами (4)–(7).

В частности, $\Phi(A)$ не меняется, если матрицу A подвергнуть элементарному преобразованию типа II.

Приведем матрицу A при помощи элементарных преобразований к треугольному виду, где, конечно, некоторые элементы на диагонали могут равняться нулю.

С учетом вышесказанного мы имеем формулы

$$\det A = (-1)^q \det \overline{A} = (-1)^q \overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\ldots\overline{a}_{nn}$$

и

$$\Phi(A) = (-1)^q \Phi(\overline{A}),$$

где q — число элементарных преобразований типа I, совершенных при переходе от A к $\overline{A}$.

Однако мы уже доказывали, что для верхнетреугольных матриц и функции Φ, удовлетворяющей свойствам (1)–(2), верно, что

$$\Phi(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}\Phi(E).$$

Таким образом, теорема доказана. $\square$

Теперь докажем важную теорему об определителе с углом нулей.

Теорема 3. *Для определителя D порядка $n+m$, у которого на пересечении первых n столбцов и последних m строк стоят нули, имеет место формула*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \ldots & a_{1,n+m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \ldots & a_{n,n+m} \\ 0 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & b_{m1} & \ldots & b_{mm} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

(определитель в левой части называется квазитреугольным или определителем с углом нулей).

Доказательство. Зафиксируем сначала $n(n+m)$ элементов a_{ij} рассмотрим определитель D как функцию элементов b_{kl}, которые образуют квадратную матрицу порядка m.

На полученную функцию можно смотреть как на функцию матрицы B:

$$D = \mathcal{D}(B).$$

Ясно, что полилинейность и кососимметричность определителя D относительно последних m строк эквивалентна тем же свойствам $\mathcal{D}(B)$ относительно строк матрицы B.

Значит, правомерно применить к $\mathcal{D}(B)$ теорему, согласно которой

$$\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(E) \det B.$$

По определению функции $\mathcal{D}$ имеем

$$\mathcal{D}(E) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \dots & a_{1,n+m} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \dots & a_{n,n+m} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложим $\mathcal{D}(E)$ по последней строке, затем по предпоследней, и т.п.

Повторив эту операцию m раз, мы убедимся в том, что $\mathcal{D}(E) = \det A$.

Окончательно получаем

$$D = \mathcal{D}(B) = \det A \cdot \det B.$$

$\square$

В более компактных обозначениях можно написать

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Здесь A и B — квадратные матрицы, а нулевая матрица 0 и матрица C — прямоугольные.

Благодаря тому, что определитель транспонированной матрицы совпадает с определителем исходной, получаем

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Теперь попробуем найти определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

Во-первых, аналогично рассуждениям выше,

$$\det \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} C & A \\ E & 0 \end{pmatrix} \cdot \det B.$$

Теперь применим формулу разложения по строке m раз:

$$\det \begin{pmatrix} C & A \\ E_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} * & \ldots & * & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \hdotsfor{6} \\ * & \ldots & * & a_{n1} & \ldots a_{nn} & \\ 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+2)+(n+4)+\cdots+(n+2m)} \det A = (-1)^{mn} \det A.$$

Окончательно приходим к выводу, что если A, B — квадратные матрицы порядков n, m соответственно, то

$$\det \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det A \cdot \det B.$$

Исключительно важное утверждение об определениях матриц содержит

Теорема 4. *Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n. Тогда*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Доказательство. Согласно формулам умножения матриц i-ая строка матрицы $(AB)_{(i)}$ записывается в виде

$$(AB)_{(i)} = (A_{(i)}B^{(1)}, A_{(i)}B^{(2)}, \ldots, A_{(i)}B^{(n)}),$$

где

$$A_{(i)}B^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Фиксируем матрицу B и для любой матрицы A положим

$$\mathcal{D}_B(A) = \det AB.$$

Докажем, что функция $\mathcal{D} = \mathcal{D}_B$ удовлетворяет условиям кососимметричности и полилинейности.

В самом деле, поменяем $A_{(s)}$ и $A_{(t)}$ местами. Так как s-я и t-я строки матрицы AB имеют вид

$$
\begin{gathered}
(A_{(s)}B^{(1)}, \dots, A_{(s)}B^{(n)}),\\
(A_{(t)}B^{(1)}, \dots, A_{(t)}B^{(n)}),
\end{gathered}
$$

то при этом они тоже поменяются местами и, значит,

$$
\begin{gathered}
\mathcal{D}(\dots, A_{(s)}, \dots, A_{(t)}, \dots) = \mathcal{D}(A) = \\
= \det AB = \det[\dots, (AB)_{(s)}, \dots, (AB)_{(t)}, \dots] = \\
= -\det[\dots, (AB)_{(t)}, \dots, (AB)_{(s)}, \dots] = -\mathcal{D}(\dots, A_{(t)}, \dots, A_{(s)}, \dots).
\end{gathered}
$$

Далее, как известно, $\det AB$ — линейная функция элементов i-й строки $(AB)_{(i)}$:

$$
\det AB = \lambda_1 A_{(i)}B^{(1)} + \lambda_2 A_{(i)}B^{(2)} + \dots + \lambda_n A_{(i)}B^{(n)}.
$$

Поэтому

$$
\mathcal{D}(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k a_{ik},
$$

где

$$
\mu_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{kj}
$$

— скаляр, не зависящий от элементов i-й строки $A_{(i)}$ матрицы A.

Таким образом, выполнены оба условия, поэтому $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(E) \cdot \det A$. Но по определению $\mathcal{D}(E) = \det EB = \det B$.

Отсюда вытекает искомая формула. $\square$