ЛЕКЦИЯ 12

ФОРМУЛА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

МЕТОД ОКАЙМЛЯЮЩИХ МИНОРОВ

ФОРМУЛА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Мы уже проходили, что условие невырожденности матрицы эквивалентно условию ее обратимости.

Применяя это к соотношению

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

мы получим

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1.$$

Значит, *определитель невырожденной матрицы отличен от нуля и*

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

Наряду с матрицей A рассмотрим ее *присоединенную* матрицу

$$A^{\,\mathrm{ad}} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

У матрицы $A^{\,\mathrm{ad}}$ на месте (i, j) стоит алгебраическое к элементу a_{ji} транспонированной матрицы.

Теорема 1. *Матрица* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *невырожденна (обратима) тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$. *Если* $\det A \neq 0$, *то*

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} A^{\mathrm{ad}},$$

или, в более подробной записи,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}.$$

Доказательству теоремы предпошлем лемму:

Лемма 1. *Пусть* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Имеют место соотношения*

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \delta_{ij} \det A,$$
$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = \delta_{ij} \det A,$$

где δ_{ij} *— символ Кронекера. При* $i \neq j$ *говорят о разложении определителя* $\det A$ *по чужой строке или чужому столбцу или о фальшивом разложении.*

Доказательство. при $i = j$ утверждение леммы уже доказывалось как обычное разложение определителя по строке или столбцу.

Поэтому остается рассмотреть случай $i \neq j$, когда $\delta_{ij} = 0$.

С этой целью введем матрицу

$$A' = [A_{(1)}, \dots, A_{(i)}, \dots, A_{(i)}, \dots, A_{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

получающуюся из матрицы A заменой j-й строки на i-ую.

Как у всякой другой квадратной матрицы с двумя одинаковыми строками, $\det A' = 0$.

С другой стороны, алгебраическое дополнение A'_{jk}, $k = 1, \dots, n$, образуется путем зачеркивания j-й строки $A'_{(j)} = A_{(i)}$ и k-го столбца определителя, так что $A'_{jk} = A_{jk}$.

Формальное разложение определителя матрицы $A' = (a'_{st})$ по j-й строке даст нам соотношение

$$0 = \det A' = \sum_{k=1}^{n} a'_{jk} A'_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk},$$

что ровно и совпадает с соотношением в формулировке теоремы.

Ситуация со столбцами совершенно аналогична. $\square$

Возвращаясь к доказательству теоремы, заметим, что левая часть соотношение из леммы есть не что иное как элемент матрицы $C = AA^{\,\mathrm{ad}}$:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Мы доказали, что

$$(c_{ij}) = (\delta_{ij} \det A) = (\det A)E.$$

Таким образом,

$$AA^{\,\mathrm{ad}} = (\det A)E,$$

откуда при $\det A \neq 0$ получаем

$$(\det A)^{-1}(AA^{\,\mathrm{ad}}) = A(\det A)^{-1}A^{\,\mathrm{ad}} = E.$$

Отсюда, очевидно,

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}A^{\,\mathrm{ad}}.$$

Следствие 1. *Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (или столбцы) линейно зависимы.*

Доказательство. Линейная зависимость строк (или столбцов) матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ эквивалентна неравенству $\operatorname{rank} A < n$, то есть вырожденности матрицы A, что равносильно условию $\det A = 0$. □

ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Выведем теперь из всего уже доказанного формулы для решения системы из n линейных уравнений с n неизвестными.

Теорема 2 (Крамер)**.** *Если линейная система*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

имеет отличный от нуля определитель (то есть $\det(a_{ij}) \neq 0$*), то ее единственное решение задается формулами*

$$x_k^0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство. Так как $\det A \neq 0$, то матрица (a_{ij}) обратима.

Поэтому, записав нашу систему в виде

$$AX = B,$$

мы будем иметь

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_k^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned} x_k^0 = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} b_i = \\ = \frac{1}{\det A}(b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \cdots + b_n A_{nk}), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Именно такое выражение мы получим, если разложим определитель из числителя формулы Крамера по k-му столбцу. $\square$

МЕТОД ОКАЙМЛЯЮЩИХ МИНОРОВ

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

— произвольная прямоугольная матрица размера $m \times n$ с коэффициентами $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Определение 1. Элементы, стоящие на пересечении каких-то выделенных k строк и k столбцов $m \times n$-матрицы A ($k \leqslant \min(m, n)$) составляют квадратную матрицу, определитель которой называется *минором k-го порядка* для A.

Иногда говорят о миноре

$$M \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix},$$

если $i_1, \dots, i_k$ и $j_1, \dots, j_k$ — номера выделенных строк и столбцов.

При $k = n - 1$ и квадратной исходной матрице мы приходим к ранее введенному понятию минора M_{ij}.

Минор $\widetilde{M}$ называется *окаймляющим* для M, если M получается из $\widetilde{M}$ вычеркиванием одной крайней строки (первой или последней) и одного крайнего столбца.

Теорема 3 (метод окаймляющих миноров)**.** *При вычислении ранга матрицы A следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если для A уже найден минор $M \neq 0$ порядка r, то требуют вычисления лишь миноры порядка $r+1$, окаймляющие минор M. Если все они равны нулю, то* $\operatorname{rank} A = r$.

Доказательство. Рассуждение основано на простом замечании, что если все миноры k-го порядка матрицы A равны нулю, то равны нулю и все миноры более высоких порядков.

Действительно, если бы минор большего порядка (например, $k+r$-го) был бы ненулевым, то все $k+r$ строчек соответствующей матрицы были бы линейно независимыми. Тем более линейно независимыми были бы любые k из этих строчек. Это означало бы, что ранг соответствующей подматрицы размера $k \times (k+r)$ равнялся бы k по строчкам, то есть равнялся бы тому же числу k и по столбцам. Но это означает, что в такой подматрице есть k линейно независимых столбцов, то есть есть ненулевой минор порядка k.

Теперь будем действовать по схеме, о которой говорится в теореме, то есть будем искать все большие ненулевые миноры.

Пусть мы нашли какой-то минор $M \neq 0$ порядка r.

Без ограничения общности считаем, что M отвечает матрице, стоящей в верхнем левом углу нашей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ & M & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rj} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Этого всегда можно достичь перестановкой строк и столбцов, не меняющей, как нам известно, ранга матрицы A.

Выделим теперь в A строку $A_{(i)}$ и столбец $A^{(j)}$ с совершенно произвольными номерами i, j. Составим при помощи элементов из $A_{(i)}$ и $A^{(j)}$ минор $\widetilde{M}$ порядка $r+1$, окаймляющий M:

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{pmatrix}.$$

Если $\widetilde{M} \neq 0$, переходим к минорам, окаймляющим $\widetilde{M}$. Критический момент настанет, когда все окаймляющие M миноры будут равны нулю.

Итак, пусть $\widetilde{M} = 0$ при любом выборе i, j. Разлагая $\widetilde{M}$ по элементам последней строки, придем к соотношению

$$a_{i1}M_1 + a_{i2}M_2 + \dots + a_{ir}M_r + a_{ij}N = 0$$

с коэффициентами

$$M_s = (-1)^{r+s+1} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,s-1} & a_{1,s+1} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{r,s-1} & a_{r,s+1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \end{vmatrix},$$

не зависящими от i. Так как $M \neq 0$, то

$$a_{ij} = \lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \dots + \lambda_r a_{ir}$$

для $i = 1, 2, \dots, m$ с одними и теми же коэффициентами $\lambda_s = -M_s/M$, $1 \leqslant s \leqslant r$. Таким образом,

$$A^{(j)} = \lambda_1 A^{(1)} + \lambda_2 A^{(2)} + \dots + \lambda_r A^{(r)},$$

то есть любой столбец $A^{(j)}$ является линейной кобинацией первых r столбцов.

Это из означает, что ранг матрицы ровно равен r. □

Следствие 2. *Ранг всякой матрицы совпадает с наивысшим порядком ее отличного от нуля минора.*