ЛЕКЦИЯ 14

ИДЕАЛЫ В КОЛЬЦАХ

ФАКТОР-КОЛЬЦА

ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМЕ ДЛЯ КОЛЕЦ

МАКСИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ

ИДЕАЛЫ В КОЛЬЦАХ

Идеал в кольце — это аналог нормальной подгруппы в группе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Идеалом кольца R называется подмножество I этого кольца, которое по сложению является его подгруппой, а по умножению удовлетворяет свойству

$$\forall r \in R \forall a \in I \quad ra \in I, ar \in I.$$

Идеал I также называется *двухсторонним идеалом кольца*.

При этом левым идеалом кольца R называется его аддитивная подгруппа I , удовлетворяющая лишь свойству

$$\forall r \in R \forall a \in I \quad ra \in I.$$

Аналогично вводится и понятие правого идеала кольца.

1. Понятно, что в кольце всегда есть два тривиальных идеала — $\{0\}$ и все кольцо.

В полях нет нетривиальных идеалов, так как любой ненулевой элемент поля, если он лежит в некотором идеале, будучи умноженным на подходящий элемент поля, дает любой заведомо выбранный элемент этого поля.

2. В кольце целых чисел все идеалы имеют вид $n\mathbb{Z}$ (порождаются одним элементом $n \in \mathbb{Z}$). Таким идеалы (порожденные одним элементом) называются *главными*.

Действительно, рассмотрим некоторый ненулевой идеал I кольца $\mathbb{Z}$ и его минимальный положительный элемент d . Если каждый элемент идеала делится на d , то перед нами идеал $d\mathbb{Z}$.

Если существует элемент $a \in I$, который не делится на d , то разделим a на d с остатком, получив

$$a = qd + r, \quad 0 < d < r.$$

Так как $d \in I$, то $qd \in I$, а значит, $r = a - qd \in I$. Получаем противоречие в выборе d .

Кольцо, в котором все идеалы главные, называется *кольцом главных идеалов*.

3. Кольцо многочленов от одной переменной над полем является кольцом главных идеалов (доказательство полностью аналогично доказательству для целых чисел). Кольцо многочленов над кольцом уже не обязательно является кольцом главных идеалов: в кольце $\mathbb{Z}[x]$ можно взять идеал, состоящих из многочленов с четным свободным членом. Докажите, что он не является главным.

Докажите также, что кольцо многочленов над полем от нескольких переменных тоже не является кольцом главным идеалов.

4. В кольце $\mathbb{Z}_n$ также все идеалы главные, так как вместе с любыми элементами m, k идеал всегда содержит их НОД.

5. Кольцо матриц $\mathbf{M}_n(R)$ — некоммутативное кольцо, поэтому в нем нужно различать односторонние и двухсторонние (настоящие) идеалы.

Примерами правых идеалов могут служить множества матриц, у которых некоторый набор строк — нулевой (для получения левого идеала строки нужно заменить на столбцы).

Если $R = \mathbb{K}$ — поле, то в кольце матриц над ним нет нетривиальных идеалов (кольцо $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ просто).

Доказательство. Пусть $0 \neq A \in I$. Тогда в матрице A есть ненулевой элемент a_{ij} . Домножим матрицу A слева на $a_{ij}^{-1}E_{ii}$ и справа — на E_{jj} . В результате получим, что матрица E_{ij} также содержится в идеале I . Значит, любая матричная единица $E_{kl} = E_{ki}E_{ij}E_{jl}$ содержится в идеале I , откуда следует, что $I = \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Пусть нам дан набор всех двухсторонних идеалов кольца R . Найдите тогда все идеалы кольца $\mathbf{M}_n(R)$.

6. Каждый идеал кольца рядов $\mathbb{K}[[x]]$ ($\mathbb{K}$ — поле) является главным идеалом, порожденным рядом x^n . Доказывается это очевидным образом, благодаря описанию обратимых элементов в данном кольце.

7. Если I_1 — идеал кольца R_1 , I_2 — идеал кольца R_2 , то $I_1 \oplus I_2$ — идеал кольца $R_1 \oplus R_2$.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Пусть R_1 и R_2 — кольца с единицами. Докажите обратное утверждение, т.е. что если I — идеал кольца $R_1 \oplus R_2$, то он имеет вид $I_1 \oplus I_2$, где $I_1 \triangleleft R_1$, $I_2 \triangleleft R_2$. Верно ли это утверждение для колец без единицы?

ФАКТОР-КОЛЬЦА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Фактор-кольцом кольца R по его идеалу I называется множество смежных классов $\{r+I \mid r \in R\}$ аддитивной группы кольца R по идеалу I с операциями

$$(r + I) + (s + I) = (r + s) + I \text{ и } (r + I)(s + I) = rs + I.$$

Докажем корректность этого определения. Действительно, корректность сложения очевидна. Для доказательства корректности умножения рассмотрим произведение $(r+I)(s+I) = rs+rI+Is+I^2$. По определению идеала $rI, Is, I^2 \subseteq I$, поэтому умножение не зависит от выбора представителей смежных классов.

То, что в результате получается кольцо, очевидно.

Ясно, что из кольца с единицей при факторизации получается кольцо с единицей (если только мы не рассматриваем фактор R/R); из коммутативного кольца при факторизации получается коммутативное кольцо.

1. Ясно, что фактор кольца $\mathbb{Z}$ по идеалу $n\mathbb{Z}$ — это кольцо $\mathbb{Z}_n$.
2. Факторкольцо $\mathbb{R}[x]$ по идеалу $\langle x^2 + 1 \rangle$ изоморфно полю $\mathbb{C}$.

Вообще, факторкольцо кольца многочленов $\mathbb{K}[x]$ от одной переменной над полем является полем тогда и только тогда, когда соответствующий идеал порожден неприводимым многочленом.

Покажем это.

Действительно, пусть многочлен $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ приводим. Тогда $f(x) = g(x)h(x)$. Значит, в факторкольце $\mathbb{K}[x]/\langle f(x) \rangle$ содержатся делители нуля — класс $g(x)$ и класс $h(x)$, поэтому данное факторкольцо не может являться полем.

Пусть теперь многочлен $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ неприводим. Покажем, что (коммутативное) кольцо $R = \mathbb{K}[x]/\langle f(x) \rangle$ является полем.

Для этого достаточно показать, что любой ненулевой смежный класс обратим (то есть любой смежный класс, не содержащий многочлена $f(x)$, содержит обратный к нему смежный класс). Рассмотрим некоторый ненулевой смежный класс и выберем его представителя $g(x)$. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ взаимно просты, так как многочлен $f(x)$ неприводим. Значит (расширенный алгоритм Евклида), существуют такие многочлены $p(x)$ и $q(x)$, что

$$f(x)p(x) + g(x)q(x) = 1.$$

В фактор-кольце R это ровно и означает, что класс многочлена $p(x)$ обратен к классу многочлена $g(x)$.

Такое утверждение дает нам возможность строить новые поля. Самым прозрачным результатом является построение полей из p^n элементов, где n — некоторое (небольшое) натуральное число.

Например, поле из 9 элементов можно строить как

$$\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 1 \rangle;$$

поле из 8 элементов — как

$$\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + 1 \rangle.$$

Теорема 1. Если $\mathbb{F}$ — поле, $f(x)$ — неприводимый многочлен над ним, то $\mathbb{F}[x]/\langle f(x) \rangle$ — это поле, в которое естественно вкладывается поле $\mathbb{F}$, а многочлен $f(x)$ имеет в нем корень. Такое поле называется простым расширением поля $\mathbb{F}$.

Доказательство. Действительно, мы уже выше доказали, что $\overline{\mathbb{F}} = \mathbb{F}[x]/\langle f(x) \rangle$ — поле. Поле $\mathbb{F}$ естественно вкладывается в поле $\overline{\mathbb{F}}$ как подполе из классов констант. Многочлен $f(x)$ имеет корень в $\overline{\mathbb{F}}$ — класс многочлена x . $\square$

3. Если профакторизовать кольцо многочленов от двух переменных $\mathbb{F}[x, y]$ по идеалу, порожденному многочленом x (все многочлены, одночлены которых содержат множитель x), то фактор-кольцо будет изоморфно кольцу многочленов от одной переменной $\mathbb{F}[y]$.

4. Рассмотрим кольцо матриц $\mathbf{M}_n(R)$ над кольцом R . Пусть I — идеал кольца R .

Тогда множество всех матриц

$$\mathbf{M}_n(I) = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in I \forall i, j = 1, \dots, n\}$$

является идеалом во всем кольце матриц.

Фактор-кольцо

$$\mathbf{M}_n(R)/\mathbf{M}_n(I)$$

изоморфно кольцу матриц

$$\mathbf{M}_n(R/I)$$

с коэффициентами из фактор-кольца R/I .

5. Факторизация кольца рядов $\mathbb{F}[[x]]$ по его идеалам дает нам:

- поле $\mathbb{F}$ для идеала $\langle x \rangle$;
- если в качестве идеала I взять идеал, порожденный многочленом (рядом) x^n , $n > 1$, то представителями смежных классов будут многочлены степени, меньшей n .

Такие многочлены складываются почленно.

При умножении двух многочленов мы сначала умножаем их нормальным образом, а потом удаляем все степени, не меньшие n .

Таким образом, фактор-кольцо — это то же самое, что и

$$\mathbb{F}[x]/\langle x^n \rangle.$$

Ясно, что в таком фактор-кольце появляются делители нуля.

6. Ясно, что если профакторизовать кольцо $R_1 \oplus R_2$ по прямому слагаемому (например, R_2), то в качестве фактор-кольца мы получим дополнительное прямое слагаемое (например, R_1).

Вообще при факторизации кольца

$$R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_n$$

по идеалу вида

$$I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$$

получается кольцо

$$R_1/I_1 \oplus \cdots \oplus R_n/I_n.$$

ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМЕ ДЛЯ КОЛЕЦ

Отображение f кольца R в кольцо S называется *гомоморфизмом*, если оно сохраняет операции, т.е.

$$\begin{aligned}f(x + y) &= f(x) + f(y), \\f(xy) &= f(x)f(y)\end{aligned}$$

для любых $x, y \in R$. Образ $\text{Im } f$ гомоморфизма f является подкольцом кольца S , а ядро

$$\ker f = \{x \in R \mid f(x) = 0\}$$

— идеалом кольца R .

Согласно определению фактор-кольца R/I отображение

$$\pi : R \rightarrow R/I, \quad r \mapsto r + I,$$

является гомоморфизмом. Оно называется *каноническим гомоморфизмом* кольца R на фактор-кольцо R/I . Его ядром, очевидно, является идеал I .

Имеет место следующая *теорема о гомоморфизме для колец*, аналогичная теореме о гомоморфизме для групп.

Теорема 2. Пусть $f : R \rightarrow S$ гомоморфизм колец. Тогда

$$\text{Im } f \cong R/\ker f.$$

Более точно, имеется изоморфизм

$$\varphi : \text{Im } f \rightarrow R/\ker f,$$

ставящий в соответствие каждому элементу $b = f(a) \in \text{Im } f$ смежный класс $\pi(a) = a + \ker f$.

Доказательство. Благодаря теореме о гомоморфизме для групп мы уже знаем, что отображение φ является изоморфизмом аддитивных групп.

Остается только проверить, что оно сохраняет операцию умножения. Пусть $f(x) = u$, $f(y) = v$. Тогда $f(xy) = uv$ и

$$\varphi(uv) = \pi(xy) = \pi(x)\pi(y) = \varphi(u)\varphi(v).$$

□

МАКСИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ В КОЛЬЦАХ

Для того, чтобы доказывать существование максимального идеала в кольце (определение — ниже), нам потребуется принять в качестве аксиомы так называемую *аксиому выбора*, а точнее, *лемму Цорна*, которая ей эквивалентна.

АКСИОМА ВЫБОРА. Если X_i — непустое множество для каждого $i \in I$, то декартово произведение $\prod_{i \in I} X_i$ непусто.

Эквивалентной формулировкой аксиомы выбора является следующая:

ЛЕММА ЦОРНА. Пусть X — непустая совокупность множеств, замкнутая относительно объединений непустых цепей (т.е. если $0 \neq Y \subset X$ и Y — цепь, то $\cup Y \in X$); тогда X обладает максимальным элементом, т.е. таким элементом $x \in X$, что из $x \subset y \in X$ следует $x = y$.

Еще одной эквивалентной формулировкой аксиомы выбора является следующий

Принцип вполне-упорядоченности Каждое множество может быть вполне упорядочено.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Докажите, что у любого линейного пространства есть базис.

Теперь мы можем ввести понятие максимального идеала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Идеал I кольца R называется *максимальным*, если он является максимальным по включению среди всех собственных идеалов кольца R .

Теорема 3. *В любом ассоциативном кольце R с единицей существует (возможно, не единственный), максимальный идеал I .*

Доказательство. Для доказательства теоремы нам понадобится следующее (очевидное) утверждение:

Идеал I кольца R тогда и только тогда является собственным, когда он не содержит единицы.

Теперь перейдем к доказательству теоремы.

Рассмотрим множество всех собственных идеалов кольца R (оно непусто, так как содержит нулевой идеал) с отношением порядка по включению.

Если в этом множестве есть некоторая линейно упорядоченная цепь идеалов, то она состоит из вложенных друг в друга идеалов. Взяв ее объединение, мы снова получим собственный идеал, так как объединение не содержит единицы.

Значит, множество собственных идеалов удовлетворяет условию леммы Цорна, т.е. обладает некоторым максимальным элементом — максимальным идеалом I . $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 4. Будет ли верно условие теоремы, если кольцо R было кольцом без единицы?

Теорема 4. *Для коммутативного кольца R с единицей фактор-кольцо R/I тогда и только является полем, когда идеал I — максимальный.*

Доказательство. Сначала пусть идеал I — максимальный. Рассмотрим некоторый ненулевой элемент фактор-кольца R/I — $r + I$, $r \notin I$.

Рассмотрим главный идеал $\langle r \rangle = rR$. Ясно, что он не содержится целиком в идеале I .

Теперь рассмотрим множество

$$J = \{ra + x \mid a \in R, x \in I\}.$$

Это множество является идеалом (простая проверка), причем строго содержащим идеал I . Значит, $J = R$, так как идеал I максимален.

В том числе, единица представляется в виде $1 = ra + x$, где $a \in R$, $x \in I$. Получается, что класс элемента a обратен к классу элемента r в фактор-кольце R/I , то есть это кольцо является полем.

Пусть, напротив, мы знаем, что кольцо R/I является полем, но идеал I — не максимальный. Тогда он содержится в некотором собственном идеале J кольца R . Рассмотрим некоторый $r \in J \setminus I$. Видно, что идеал $\langle r, I \rangle$ содержится в идеале J , то есть не содержит единицу кольца. Это означает, что класс элемента r в фактор-кольце R/I необратим. Противоречие. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 5. Каким свойством обладает фактор-кольцо R/I для максимального идеала I , если R не обязательно коммутативно?

ПРИМЕР 1. Максимальным идеалом в поле является нулевой идеал.

Максимальными идеалами в кольце целых чисел являются идеалы $p\mathbb{Z}$, где p — простое.

Максимальными идеалами в кольце многочленов $\mathbb{F}[x]$ над полем являются идеалы, порожденные неприводимыми многочленами.

Максимальными идеалами в кольце $\mathbb{Z}_n$ являются идеалы, порожденные простыми числами, делящими n .

УПРАЖНЕНИЕ 6. Докажите, что максимальными идеалами в кольце матриц $\mathbf{M}_n(R)$ над кольцом R являются кольца матриц $\mathbf{M}_n(I)$ над максимальными идеалами I кольца R .

ПРИМЕР 2. В кольце рядов над полем $\mathbb{F}[[x]]$ единственным максимальным идеалом является идеал $\langle x \rangle$.

Кольца с единственным максимальным идеалом называются *локальными* (примеры: поля, кольца рядов над полями, кольца $\mathbb{Z}_p^n$).

ПРИМЕР 3. В прямой сумме колец

$$R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_n$$

максимальными являются идеалы

$$R_1 \oplus \cdots \oplus R_{i-1} \oplus I_i \oplus R_{i+1} \oplus \cdots \oplus R_n,$$

где I_i — максимальный идеал кольца R_i .