ЛЕКЦИЯ 15

ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

ПОЛЯРНАЯ ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

ФОРМУЛА МУАВРА, ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ

ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Нам хочется расширить поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ так, чтобы в новом поле уравнение

$$x^2 + 1 = 0$$

обладало бы решением.

Одной из моделей такого расширения может служить множество K всех квадратных матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Покажем, что такое множество K — поле.

В самом деле, в K содержатся ноль и единица кольца $M_2(\mathbb{R})$.

Далее, из соотношений

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$-\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -(-b) & -a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$$

вытекает замкнутость K относительно операций сложения и умножения.

Ассоциативность этих операций является следствием их ассоциативности в $M_2(\mathbb{R})$.

То же самое относится к законам дистрибутивности и коммутативности сложения.

Таким образом, K — подкольцо в $M_2(\mathbb{R})$.

Коммутативность умножения в K вытекает из симметричности формулы умножения матриц, приведенной выше.

Остается доказать лишь существование в K матрицы, обратной к любой матрице соответствующего вида с определителем $a^2 + b^2 \neq 0$.

Прямо по пройденной формуле коэффициентов обратной матрицы получаем

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix},$$

где

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, K — поле.

Заметим, что каждый элемент можно представить как сумму

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aE + bJ, \quad a, b \in \mathbb{R},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поле K содержит подполе

$$\{aE \mid a \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R},$$

а соотношение

$$J^2 + E = 0$$

показывает, что элемент J является решением уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Не поле K, однако, оказывается реальным полем комплексных чисел, а некий изоморфный ему объект, элементы которого изображаются точками плоскости.

Желание иметь геометрическую реализацию поля K не случайно, если вспомнить, что и поле $\mathbb{R}$ для нас не отделимо от понятия прямой с фиксированным нулем 0 и масштабом 1.

Итак, мы хотим построить поле $\mathbb{C}$, элементы которого были бы точками плоскости $\mathbb{R}^2$, а сложение и умножение точек, подчиняясь всем правилам операций в поле, решали бы нашу задачу.

Выберем на декартовой плоскости прямоугольную систему координат с осью абсцисс x и осью ординат y.

Будем писать (a, b) для точки с абсциссой a и ординатой b.

Для точек (a, b) и (c, d) определим сумму и произведение по правилам

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d),\\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

Прямая, но довольно утомительная проверка убедила бы нас в том, что так определенные операции наделяют множество точек плоскости строением поля с нужными свойствами.

К счастью, эта проверка нам не нужна. Сопоставление

$$(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

точкам плоскости $\mathbb{C}$ элементов построенного ранее поля K дает нам изоморфизм, откуда следует, что множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ — поле.

Оно и называется обычно *полем комплексных чисел.*

Выбранная нами ось абсцисс, то есть множество точек $(a, 0)$ ничем не отличается по своим свойствам от вещественной прямой, потому полагаем $(a, 0) = a$. Ноль $(0, 0)$ и единица $(1, 0)$ при этом становятся обычными вещественными числами.

Для точки $(0, 1)$ на оси ординат вводится, со времен Эйлера и Гаусса, оозначение i мнимой единицы, являющейся корнем уравнения $x^2 = -1$.

Произвольное комплексное число $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$ запишется теперь в традиционном виде

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, поэтому $\mathbb{C}$ — поле нулевой характеристики.

Геометрическое истолкование действий с комплексными числами.

Ось абсцисс плоскости $\mathbb{C}$ обычно называется *вещественной осью*, ось ординат — *мнимой осью*, а числа iy, лежащие на ней — *чисто мнимыми.*

Соответственно, в записи $z = x + iy$ будем называть $\Re z = x$ — действительной частью числа z, $\Im z = y$ — мнимой частью числа z.

Рассмотрим отображение, которое сопоставляет каждому комплексному числу $z = x + iy$ комплексно сопряженное с ним число $\overline{z} = x - iy$ (*операция комплексного сопряжения*). Геометрически оно сводится к отражению плоскости $\mathbb{C}$ относительно горизонтальной оси.

Теорема 1. *Отображение $z \mapsto \overline{z}$ является автоморфизмом порядка два поля $\mathbb{C}$, оставляющим на месте все вещественные числа. Сумма и произведение сопряженных друг другу чисел вещественны.*

Доказательство. Утверждение $\overline{x} = x$ при $x \in \mathbb{R}$ очевидно по определению комплексно сопряженного числа.

В частности, понятно, что $\overline{0} = 0$, $\overline{1} = 1$.

Столь же очевидно утверждение о порядке:

$$\overline{(\overline{z})} = z.$$

Нам остается проверить соотношения

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2,$$

которые очевидно следуют из формул

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

и

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

В частном случае, когда мы складываем или перемножаем комплексно сопряженные числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$, получим

$$z + \overline{z} = 2x, \quad z\overline{z} = x^2 + y^2.$$

□

Определение 1. *Модулем* комплексного числа $z = x + iy$ называется неотрицательное вещественное число

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Положение точки на плоскости, как известно, вполне определяется задания ее полярных координат: расстояния $r = |z|$ от начала координат до z и угла φ между положительным направлением оси абсцисс и направлением из нчала координат на z.

Угол φ называется *аргументом* числа z и обозначается

$$\arg z = \varphi.$$

По определению $\arg z$ могут принимать любые (как положительные, так и отрицательные) значения, но при заданном r углы, отличающиеся на целое кратное 2π, соответствуют одному и тому же комплексному числу.

Аргумент не определен для числа 0 с модулем $|0| = 0$.

Отношения больше/меньше бессмысленны в применении к комплексным числам, то есть их нельзя соединять знаком неравенства: в отличие от вещественных чисел, *комплексные числа не упорядочены.*

Более точно, на $\mathbb{C}$ не существует отношения $>$ со свйоствами:
(1) если $z \in \mathbb{C}$, то $z = 0$, $z > 0$ или $z < 0$;
(2) из $u, v > 0$ следует $u + v > 0$ и $uv > 0$.

Доказательство. Действительно, если бы такое отношение существовало, то из $z \neq 0$ следовало бы $z^2 > 0$. Это же было бы верно для $1 = 1^2$ и для $-1 = i^2$. Таким образом, оба числа $-1, 1$ оказались бы положительными, что невозможно. $\square$

ПОЛЯРНАЯ ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Полярные координаты r и φ определяют x и y по известным формулам

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Это — так называемая тригонометрическая форма числа z.

Операция сложения комплексных чисел z, z' просто выражается в декартовых координатах, а именно по правилу параллелограмма.

Из понятных геометрических соображений получается важное неравенство

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Заметим, что это неравенство, которое можно было бы записать в более общей форме

$$|z| - |z'| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z| + |z'|,$$

совершенно аналогично соответствующему неравенству для вещественных чисел.

Операция умножения комплексных чисел очень удобно выражется в полярных координатах:

Теорема 2. *Модуль произведения комплексных чисел z, z' равен произведению модулей, аргумент — сумме аргументов множителей:*

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|, \quad \arg zz' = \arg z + \arg z'.$$

Аналогично,

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, \quad \arg\frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'.$$

Доказательство. Действительно, пусть тригонометрической формой для z и z' будет

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi').$$

Непосредственным умножением получаем

$$zz' = rr'((\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi') + i(\cos\varphi\sin\varphi' + \sin\varphi\cos\varphi')),$$

а это соотношение при помощи известных тригонометрических формул приводит к тригонометрической форме числа zz':

$$zz' = |z| \cdot |z'| \cdot (\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')).$$

Если, далее, $z'' = z/z'$, то $z = z'z''$. Поэтому, используя доказанные формулы для произведения $z'z''$, мы получим из них формулы для дроби z/z'. $\square$

ФОМУЛА МУАВРА

Из формулы для умножения комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, вытекает *формула Муавра*

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

справедливая для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Частный случай формулы Муавра при $r = 1$, биномиальная формула и соотношения

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^{4k+l} = i^l$$

дают возможность получить выражения для синусов и косинусов кратного угла:

$$\cos n\varphi = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}\varphi\cdot\sin^{2k}\varphi,$$
$$\sin n\varphi = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k C_n^{2k+1}\cos^{n-1-2k}\varphi\cdot\sin^{2k+1}\varphi.$$

Далее, мы хотим научиться извлекать корни произвольной степени из комплексных чисел, и основной вопрос, который тут возникает: всегда ли это можно сделать?

Оказывается, что всегда, и формула Муавра дает по существу полное решение этого вопроса.

Пусть нам дано комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а мы хотим найти число $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ такое, что

$$(z')^n = z.$$

Выражая $(z')^n$ по формуле Муавра, а затем сравнивая в обеих частях равенства $(z')^n = z$ модули и аргументы, мы находим

$$(r')^n = r \text{ и } n\varphi' = \varphi + 2\pi k.$$

Итак,

$$r' = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi' = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

Число $\sqrt[n]{r}$ — это обычный действительный корень из положительного действительного числа, этот корень всегда существует и определен однозначно. А вот аргумент определен неоднозначно.

При $k = 0, 1, \ldots, n-1$ для z' будет получено n различных значений, причем ими исчерпываются все корни, так как из

$$k = nq + r, \quad 0 \leqslant r \leqslant n-1,$$

следует

$$\varphi' = \frac{\varphi + 2\pi r}{n} + 2\pi q.$$

Нами доказана

Теорема 3. *Извлечение корня n-й степени из комплексного числа*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

всегда возможно. Все n значений корня n-й степени из z расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в нуле и радиуса $\sqrt[n]{|z|}$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Следствие 1. *Корни n-й степени из единицы выражаются формулой*

$$\sqrt[n]{1} = \varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$. *Они расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в нуле и радиусом 1.*

Корень n-й степени из единицы называется *примитивным* или *первообразным*, если он не является корнам из единицы никакой меньшей степени.

Таковыми, например, будут

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \quad \varepsilon_{n-1}.$$

Любой другой корень ε_k является степенью примитивного:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_1^k.$$

Это видно из формулы Муавра.

Более того, $\varepsilon_k\varepsilon_l = \varepsilon_{k+l}$, если сложение брать по модулю n.

В частности, $\varepsilon_k^{-1} = \varepsilon_{n-k}$, $\varepsilon_0 = 1$.

Заметим, что таким образом *корни n-й степени из единицы составляют циклическую группу $\langle\varepsilon\rangle$ порядка n.*

Тем самым получена еще одна реализация циклической группы порядка n.

Для каждого $d|n$ в $\langle\varepsilon\rangle$ имеется ровно одна подгруппа $\langle\varepsilon^{n/d}\rangle$ порядка d.

Корень ε_m будет примитивным тогда и только тогда, когда $\langle\varepsilon_m\rangle = \langle\varepsilon\rangle$, то есть порядок элемента ε_m равен n, а это возможно только при m, взаимно простом с n.

Возвращаясь к извлечению корней n-й степени из произвольного ненулевого комплексного числа, то из каждого числа можно извлечь ровно n корней.

Теорема 4. *Каждое ассоциативное коммутативное кольцо R с единицей 1 без делителей нуля, являющееся двумерным векторным пространством над $\mathbb{R}$, изоморфно $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Без ограничения общности отождествим $1 \cdot \mathbb{R}$ с $\mathbb{R}$ и считаем $\mathbb{R}$ вложенным в R.

Так как $\dim_{\mathbb{R}} R = 2$, то существует $e \in R \setminus \mathbb{R}$ такой, что 1 и e составляют базис пространства R над $\mathbb{R}$.

Очевидно, что

$$e^2 = \alpha \cdot 1 + 2\beta \cdot e$$

с $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Для элемента $f = e - \beta \notin \mathbb{R}$ имеем $f^2 = \gamma = \alpha + \beta^2 \in \mathbb{R}$.

Очевидно, что $\gamma < 0$, поскольку иначе $\sqrt{\gamma} \in \mathbb{R}$ и мы имели бы $f = \pm\sqrt{\gamma}$.

Таким образом, существует $\delta \in \mathbb{R}$, для которого $\delta^2 = -\gamma^{-1}$.

Теперь $j^2 = -1$ для $j = \delta f$, и легко проверяется (как при построении $\mathbb{C}$), что каждый ненулевой элемент из R обратим, то есть что R — поле.

Отображение

$$\varphi : \mathbb{C} \to R,$$

определенное соответствием

$$x + iy \mapsto x + jy,$$

является искомым изоморфизмом полей. □