

# ЛЕКЦИЯ 16

## ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

### ПОЛЯРНАЯ ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

### ФОРМУЛА МУАВРА, ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ

## ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Нам хочется расширить поле вещественных чисел  $\mathbb{R}$  так, чтобы в новом поле уравнение

$$x^2 + 1 = 0$$

обладало бы решением.

Одной из моделей такого расширения может служить множество  $K$  всех квадратных матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Покажем, что такое множество  $K$  — поле.

В самом деле, в  $K$  содержатся ноль и единица кольца  $M_2(\mathbb{R})$ .

Далее, из соотношений

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}, \\ - \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a & -b \\ -(-b) & -a \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

вытекает замкнутость  $K$  относительно операций сложения и умножения.

Ассоциативность этих операций является следствием их ассоциативности в  $M_2(\mathbb{R})$ .

То же самое относится к законам дистрибутивности и коммутативности сложения.

Таким образом,  $K$  — подкольцо в  $M_2(\mathbb{R})$ .

Коммутативность умножения в  $K$  вытекает из симметричности формулы умножения матриц, приведенной выше.

Остается доказать лишь существование в  $K$  матрицы, обратной к любой матрице соответствующего вида с определителем  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

Прямо по пройденной формуле коэффициентов обратной матрицы получаем

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix},$$

где

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Таким образом,  $K$  — поле.

Заметим, что каждый элемент можно представить как сумму

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aE + bJ, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поле  $K$  содержит подполе

$$\{aE \mid a \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R},$$

а соотношение

$$J^2 + E = 0$$

показывает, что элемент  $J$  является решением уравнения  $x^2 + 1 = 0$ .

Не поле  $K$ , однако, оказывается реальным полем комплексных чисел, а некий изоморфный ему объект, элементы которого изображаются точками плоскости.

Желание иметь геометрическую реализацию поля  $K$  не случайно, если вспомнить, что и поле  $\mathbb{R}$  для нас не отделимо от понятия прямой с фиксированным нулем  $0$  и масштабом  $1$ .

Итак, мы хотим построить поле  $\mathbb{C}$ , элементы которого были бы точками плоскости  $\mathbb{R}^2$ , а сложение и умножение точек, подчиняясь всем правилам операций в поле, решали бы нашу задачу.

Выберем на декартовой плоскости прямоугольную систему координат с осью абсцисс  $x$  и осью ординат  $y$ .

Будем писать  $(a, b)$  для точки с абсциссой  $a$  и ординатой  $b$ .

Для точек  $(a, b)$  и  $(c, d)$  определим сумму и произведение по правилам

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

Прямая, но довольно утомительная проверка убедила бы нас в том, что так определенные операции наделяют множество точек плоскости строением поля с нужными свойствами.

К счастью, эта проверка нам не нужна. Сопоставление

$$(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

точкам плоскости  $\mathbb{C}$  элементов построенного ранее поля  $K$  дает нам изоморфизм, откуда следует, что множество комплексных чисел  $\mathbb{C}$  — поле.

Оно и называется обычно *полем комплексных чисел*.

Выбранная нами ось абсцисс, то есть множество точек  $(a, 0)$  ничем не отличается по своим свойствам от вещественной прямой, потому полагаем  $(a, 0) = a$ . Ноль  $(0, 0)$  и единица  $(1, 0)$  при этом становятся обычными вещественными числами.

Для точки  $(0, 1)$  на оси ординат вводится, со времен Эйлера и Гаусса, обозначение  $i$  мнимой единицы, являющейся корнем уравнения  $x^2 = -1$ .

Произвольное комплексное число  $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$  запишется теперь в традиционном виде

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , поэтому  $\mathbb{C}$  — поле нулевой характеристики.

## Геометрическое истолкование действий с комплексными числами.

Ось абсцисс плоскости  $\mathbb{C}$  обычно называется *вещественной осью*, ось ординат — *мнимой осью*, а числа  $iy$ , лежащие на ней — *чисто мнимыми*.

Соответственно, в записи  $z = x + iy$  будем называть  $\Re z = x$  — действительной частью числа  $z$ ,  $\Im z = y$  — мнимой частью числа  $z$ .

Рассмотрим отображение, которое сопоставляет каждому комплексному числу  $z = x + iy$  комплексно сопряженное с ним число  $\bar{z} = x - iy$  (*операция комплексного сопряжения*). Геометрически оно сводится к отражению плоскости  $\mathbb{C}$  относительно горизонтальной оси.

**Теорема 1.** *Отображение  $z \mapsto \bar{z}$  является автоморфизмом порядка два поля  $\mathbb{C}$ , оставляющим на месте все вещественные числа. Сумма и произведение сопряженных друг другу чисел вещественны.*

*Доказательство.* Утверждение  $\bar{x} = x$  при  $x \in \mathbb{R}$  очевидно по определению комплексно сопряженного числа.

В частности, понятно, что  $\bar{0} = 0$ ,  $\bar{1} = 1$ .

Столь же очевидно утверждение о порядке:

$$\overline{(\bar{z})} = z.$$

Нам остается проверить соотношения

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,$$

которые очевидно следуют из формул

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

и

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

В частном случае, когда мы складываем или перемножаем комплексно сопряженные числа  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$ , получим

$$z + \bar{z} = 2x, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2.$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Модулем* комплексного числа  $z = x + iy$  называется неотрицательное вещественное число

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Положение точки на плоскости, как известно, вполне определяется заданием ее полярных координат: расстояния  $r = |z|$  от начала координат до  $z$  и угла  $\varphi$  между положительным направлением оси абсцисс и направлением из начала координат на  $z$ .

Угол  $\varphi$  называется *аргументом* числа  $z$  и обозначается

$$\arg z = \varphi.$$

По определению  $\arg z$  могут принимать любые (как положительные, так и отрицательные) значения, но при заданном  $r$  углы, отличающиеся на целое кратное  $2\pi$ , соответствуют одному и тому же комплексному числу.

Аргумент не определен для числа  $0$  с модулем  $|0| = 0$ .

Отношения больше/меньше бессмысленны в применении к комплексным числам, то есть их нельзя соединять знаком неравенства: в отличие от вещественных чисел, *комплексные числа не упорядочены*.



Более точно, на  $\mathbb{C}$  не существует отношения  $>$  со свойствами:

(1) если  $z \in \mathbb{C}$ , то  $z = 0$ ,  $z > 0$  или  $z < 0$ ;

(2) из  $u, v > 0$  следует  $u + v > 0$  и  $uv > 0$ .

*Доказательство.* Действительно, если бы такое отношение существовало, то из  $z \neq 0$  следовало бы  $z^2 > 0$ . Это же было бы верно для  $1 = 1^2$  и для  $-1 = i^2$ . Таким образом, оба числа  $-1, 1$  оказались бы положительными, что невозможно.  $\square$

## ПОЛЯРНАЯ ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Полярные координаты  $r$  и  $\varphi$  определяют  $x$  и  $y$  по известным формулам

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Это — так называемая тригонометрическая форма числа  $z$ .

Операция сложения комплексных чисел  $z, z'$  просто выражается в декартовых координатах, а именно по правилу параллелограмма.

Из понятных геометрических соображений получается важное неравенство

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Заметим, что это неравенство, которое можно было бы записать в более общей форме

$$|z| - |z'| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|,$$

совершенно аналогично соответствующему неравенству для вещественных чисел.

Операция умножения комплексных чисел очень удобно выражается в полярных координатах:

**Теорема 2.** *Модуль произведения комплексных чисел  $z, z'$  равен произведению модулей, аргумент — сумме аргументов множителей:*

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|, \quad \arg zz' = \arg z + \arg z'.$$

*Аналогично,*

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, \quad \arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'.$$

*Доказательство.* Действительно, пусть тригонометрической формой для  $z$  и  $z'$  будет

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi').$$

Непосредственным умножением получаем

$$zz' = rr'((\cos \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi') + i(\cos \varphi \sin \varphi' + \sin \varphi \cos \varphi')),$$

а это соотношение при помощи известных тригонометрических формул приводит к тригонометрической форме числа  $zz'$ :

$$zz' = |z| \cdot |z'| \cdot (\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')).$$

Если, далее,  $z'' = z/z'$ , то  $z = z'z''$ . Поэтому, используя доказанные формулы для произведения  $z'z''$ , мы получим из них формулы для дроби  $z/z'$ . □

## ФОРМУЛА МУАВРА

Из формулы для умножения комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, вытекает *формула Муавра*

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

справедливая для всех  $n \in \mathbb{Z}$ .

Частный случай формулы Муавра при  $r = 1$ , биномиальная формула и соотношения

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^{4k+l} = i^l$$

дают возможность получить выражения для синусов и косинусов кратного угла:

$$\begin{aligned}\cos n\varphi &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k} \varphi \cdot \sin^{2k} \varphi, \\ \sin n\varphi &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-1-2k} \varphi \cdot \sin^{2k+1} \varphi.\end{aligned}$$

Далее, мы хотим научиться извлекать корни произвольной степени из комплексных чисел, и основной вопрос, который тут возникает: всегда ли это можно сделать?

Оказывается, что всегда, и формула Муавра дает по существу полное решение этого вопроса.

Пусть нам дано комплексное число  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , а мы хотим найти число  $z' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$  такое, что

$$(z')^n = z.$$

Выражая  $(z')^n$  по формуле Муавра, а затем сравнивая в обеих частях равенства  $(z')^n = z$  модули и аргументы, мы находим

$$(r')^n = r \text{ и } n\varphi' = \varphi + 2\pi k.$$

Итак,

$$r' = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi' = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

Число  $\sqrt[n]{r}$  — это обычный действительный корень из положительного действительного числа, этот корень всегда существует и определен однозначно. А вот аргумент определен неоднозначно.

При  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  для  $z'$  будет получено  $n$  различных значений, причем ими исчерпываются все корни, так как из

$$k = nq + r, \quad 0 \leq r \leq n - 1,$$

следует

$$\varphi' = \frac{\varphi + 2\pi r}{n} + 2\pi q.$$

Нами доказана

**Теорема 3.** *Извлечение корня  $n$ -й степени из комплексного числа*

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

*всегда возможно. Все  $n$  значений корня  $n$ -й степени из  $z$  расположены в вершинах правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность с центром в нуле и радиуса  $\sqrt[n]{|z|}$ :*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

$$k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

**Следствие 1.** *Корни  $n$ -й степени из единицы выражаются формулой*

$$\sqrt[n]{1} = \varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n},$$

*$k = 0, 1, \dots, n - 1$ . Они расположены в вершинах правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность с центром в нуле и радиусом 1.*

Корень  $n$ -й степени из единицы называется *примитивным* или *первообразным*, если он не является корнем из единицы никакой меньшей степени.

Таковыми, например, будут

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \quad \varepsilon_{n-1}.$$

Любой другой корень  $\varepsilon_k$  является степенью примитивного:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_1^k.$$

Это видно из формулы Муавра.

Более того,  $\varepsilon_k \varepsilon_l = \varepsilon_{k+l}$ , если сложение брать по модулю  $n$ .

В частности,  $\varepsilon_k^{-1} = \varepsilon_{n-k}$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ .

Заметим, что таким образом корни  $n$ -й степени из единицы составляют циклическую группу  $\langle \varepsilon \rangle$  порядка  $n$ .

Тем самым получена еще одна реализация циклической группы порядка  $n$ .

Для каждого  $d|n$  в  $\langle \varepsilon \rangle$  имеется ровно одна подгруппа  $\langle \varepsilon^{n/d} \rangle$  порядка  $d$ .

Корень  $\varepsilon_m$  будет примитивным тогда и только тогда, когда  $\langle \varepsilon_m \rangle = \langle \varepsilon \rangle$ , то есть порядок элемента  $\varepsilon_m$  равен  $n$ , а это возможно только при  $m$ , взаимно простом с  $n$ .

Возвращаясь к извлечению корней  $n$ -й степени из произвольного ненулевого комплексного числа, то из каждого числа можно извлечь ровно  $n$  корней.

**Теорема 4.** Каждое ассоциативное коммутативное кольцо  $R$  с единицей  $1$  без делителей нуля, являющееся двумерным векторным пространством над  $\mathbb{R}$ , изоморфно  $\mathbb{C}$ .

*Доказательство.* Без ограничения общности отождествим  $1 \cdot \mathbb{R}$  с  $\mathbb{R}$  и считаем  $\mathbb{R}$  вложенным в  $R$ .

Так как  $\dim_{\mathbb{R}} R = 2$ , то существует  $e \in R \setminus \mathbb{R}$  такой, что  $1$  и  $e$  составляют базис пространства  $R$  над  $\mathbb{R}$ .

Очевидно, что

$$e^2 = \alpha \cdot 1 + 2\beta \cdot e$$

с  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Для элемента  $f = e - \beta \notin \mathbb{R}$  имеем  $f^2 = \gamma = \alpha + \beta^2 \in \mathbb{R}$ .

Очевидно, что  $\gamma < 0$ , поскольку иначе  $\sqrt{\gamma} \in \mathbb{R}$  и мы имели бы  $f = \pm\sqrt{\gamma}$ .

Таким образом, существует  $\delta \in \mathbb{R}$ , для которого  $\delta^2 = -\gamma^{-1}$ .

Теперь  $j^2 = -1$  для  $j = \delta f$ , и легко проверяется (как при построении  $\mathbb{C}$ ), что каждый ненулевой элемент из  $R$  обратим, то есть что  $R$  — поле.

Отображение

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow R,$$

определенное соответствием

$$x + iy \mapsto x + jy,$$

является искомым изоморфизмом полей. □