ЛЕКЦИЯ 2

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

МНОЖЕСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Пусть нам дана еще одна линейная система того же размера

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Будем говорить, что штрихованная система получена из исходной с помощью *элементарного преобразования типа* (I), если в новой системе все уравнения остались прежними, только какие-то два поменялись местами.

Если же в штрихованной системе все уравнения те же, что и в исходной, и только i-е уравнение выглядит как

$$(a_{i1} + ca_{k1})x_1 + (a_{i2} + ca_{k2})x_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{kn})x_n = b_i + cb_k,$$

где c — какое-то число, то полагаем, что к системе применено элементарное преобразование типа (II).

Линейные системы называются *эквивалентными*, если они либо обе несовместны, либо совместны и обладают одним и тем же множеством решений.

Если обозначать эквивалентность систем как $(a) \sim (b)$, то можно заметить, что

(1) $(a) \sim (a)$;

(2) из $(a) \sim (b)$ следует $(b) \sim (a)$;

(3) из $(a) \sim (b)$ и $(b) \sim (c)$ следует $(a) \sim (c)$.

Достаточный признак эквивалентности систем содержится в следующем утверждении:

Теорема 1. *Две линейные системы эквивалентны, если одна получается из другой путем применения конечной последовательности элементарных преобразований.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если система $(**)$ получена из системы $(*)$ применением одного элементарного преобразования, то системы $(**)$ и $(*)$ эквивалентны.

Заметим, что система $(*)$ получается из системы $(**)$ также применением одного элементарного преобразования: в случае первого типа нужно снова поменять местами два уравнения, в случае второго типа — прибавив к i-му уравнению в $(**)$ k-ое, умноженное на $(-c)$, мы получим i-е уравнение системы $(*)$.

Докажем теперь, что любое решение $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ системы $(*)$ является также решением системы $(**)$, этого благодаря замечанию будет достаточно.

Действительно, пусть у нас есть решение системы $(*)$, тогда при подставление его в каждое уравнение системы $(*)$ мы получаем верное равенство. Если система $(**)$ получилась из системы $(*)$ с помощью элементарного преобразования первого типа, то все уравнения в ней те же (только местами переставлены), поэтому тоже при подставлении набора $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ обращаются в верные равенства. Если система $(**)$ получена из системы $(*)$ элементарным преобразованием второго типа, то все уравнения, кроме i-го, автоматически обращаются в верные равенство, а i-е обращается, потому что является суммой верного равенства и еще одного врного равенства, умноженного на число c. $\square$

ПРИВЕДЕНИЕ К СТУПЕНЧАТОМУ ВИДУ

Путем последовательного применения элементарных преобразований можно перейти от заданной системы уравнений к системе более простого вида.

Во-первых, заметим, что среди коэффициентов a_{i1} имеется хотя бы один, отличный от нуля. В противном случае не имело бы смысла вообще говорить о переменной x_1.

Если $a_{11} = 0$, то так поменяем местами уравнения, чтобы в новой системе $a'_{11} \neq 0$.

Вычтем из каждого уравнения новой системы, начиная со второго, первое уравнение, умноженное на a'_{11}/a_{i1}.

Таким образом, мы получим новую систему, в которую x_1 входит только в первое уравнение.

При этом может оказаться, что вторая неизвестная также не входит во все уравнения с номером $i > 1$.

Пусть x_k — неизвестная с наименьшим номером, входящая в какое-то уравнение, отличное от первого.

Мы получим систему

$$\begin{array}{rrl}
a'_{11}x_1+ & & \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\
 & a'_{2k}x_k+ & \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\
 & \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
 & a'_{mk}x_k+ & \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m.
\end{array}$$

Не обращая внимание на первое уравнение, применим к оставшимся те же рассуждения, что и раньше.

В результате получим систему

$$\begin{array}{lllr}
a''_{11}x_1+ & & & \dots + a''_{1n}x_n = b''_1,\\
 & a''_{2k}x_k+ & & \dots + a''_{2n}x_n = b''_2,\\
 & & a''_{3l}x_l+ & \dots + a''_{3n}x_n = b''_3,\\
 & & \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\
 & & a''_{ml}x_l+ & \dots + a''_{mn}x_n = b''_m.
\end{array}$$

Будем применять этот процесс до тех пор, пока возможно. Ясно, что мы будем вынуждены остановиться не только когда станут равными коэффициенты при очередной неизвестной, но и когда станут равными нулю коэффициенты при всех остальных переменных, вплоть до n-й.

При этом наша система примет вид

$$\begin{array}{lllllcl}
\overline{a}_{11}x_1+ & & & & \dots + \overline{a}_{1n}x_n & = & \overline{b}_1,\\
 & \overline{a}_{2k}x_k+ & & & \dots + \overline{a}_{2n}x_n & = & \overline{b}_2,\\
 & & \overline{a}_{3l}x_l+ & & \dots + \overline{a}_{3n}x_n & = & \overline{b}_3,\\
 & & & \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\
 & & & \overline{a}_{rs}x_s+ & \dots + \overline{a}_{rn}x_n & = & \overline{b}_r,\\
 & & & & 0 & = & \overline{b}_{r+1},\\
 & & & & \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\
 & & & & 0 & = & \overline{b}_m.
\end{array}$$

Здесь

$$\overline{a}_{11}\overline{a}_{2k}\overline{a}_{3l}\dots\overline{a}_{rs} \neq 0.$$

Такая система называется *системой линейных уравнений в ступенчатом виде.*

Понятно, что может оказаться, что $r = n$, то есть уравнений типа $0 = \overline{b}_t$ просто нет. Полученная нами сейчас система уравнений называется *системой уравнений в ступенчатом виде.*

Теорема 2. *Всякая система линейных уравнений эквивалентна системе, имеющей ступенчатый вид.*

Доказательство. Доказательство непосредственно вытекает из предыдущих рассуждений. □

Элементарные преобразования иногда удобно производить не над системой, а над ее расширенной матрицей $(a_{ij} \mid b_i)$. Точно так же, как и предыдущая теорема, доказывается

Теорема 3. *Всякую матрицу можно при помощи элементарных преобразований привести к ступенчатому виду.*

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ввиду доказанных теорем вопросы совместности и определенности достаточно исследовать только для систем ступенчатого вида.

Начнем с вопроса совместности. Очевидно, что если система содержит уравнение

$$0 = \overline{b}_i, \quad b_i \neq 0,$$

то система несовместна.

Докажем, что если таких уравнений в системе нет, то она совместна.

Пусть $\overline{b}_t = 0$ при $t > r$.

Назовем неизвестные $x_1, x_k, x_l, \ldots, x_s$, с которых начинаются наши новые уравнения, *главными*, а остальные переменные — свободными. Главных переменных по определению всего r.

Придадим свободным неизвестным произвольные значения и подставим их во все уравнения системы. Тогда для x_s получится одно (r-ое) уравнение вида $ax_s = b$, $a = \overline{a}_{rs} \neq 0$, которое имеет единственное решение. Подставим найденное значение $x_s = x_s^0$ в первые $r-1$ уравнений и, поднимаясь так снизу вверх по системе, мы убедимся, что значения главных неизвестных определяются однозначно при любых заданных значениях для свободных неизвестных.

Нами доказана

Теорема 4. *Для совместности системы линейных уравнений необходимо и достаточно, чтобы после приведения ее к ступенчатому виду не оказалось бы уравнений вида* $0 = \overline{b}_t$ *с* $\overline{b}_t \neq 0$. *Если это условие выполнено, то свободным переменным можно придать произвольные значения; главные неизвестные (при заданных значениях для свободных) однозначно определяются из системы.*

Выясним теперь, когда система будет определенной, в предположении, что введенное нами условие совместности выполнено.

Если в системе имеются свободные неизвестные, то она заведомо неопределенная, потому что мы можем придать свободным неизвестным любые значения. Если же свободных неизвестных нет, и все неизвестные главные, то они определяются из системы однозначно, то есть система является определенной.

Остается заметить, что отсутствие свободных переменных равносильно условию $r = n$.

Мы доказали следующее утверждение:

Теорема 5. *Совместная линейная система является определенной тогда и только тогда, когда в полученной из нее ступенчатой системе выполняется равенство* $r = n$.

При $m = n$ линейную систему, приведенную к ступенчатому виду, можно записать еще так (*треугольный вид*):

$$\begin{array}{llll}
\overline{a}_{11}x_1+ & \overline{a}_{12}x_2+ & & \dots + \overline{a}_{1n}x_n = \overline{b}_1, \\
& \overline{a}_{22}x_2+ & & \dots + \overline{a}_{2n}x_n = \overline{b}_2, \\
& & \overline{a}_{33}x_3+ & \dots + \overline{a}_{3n}x_n = \overline{b}_3, \\
& & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& & & \qquad\quad \overline{a}_{nn}x_n = \overline{b}_n,
\end{array}$$

если не заботиться о том, чтобы выполнялось условие $\overline{a}_{ii} \neq 0$ для всех i.

Заметим на будущее, что матрица (a_{ij}) с элементами $a_{ij} = 0$ для $i > j$ называется *верхней треугольной*. Аналогично определяется нижняя треугольная матрица.

Из доказанных теорем вытекает

Следствие 1. *Линейная система в случае $n = m$ является совместной и определенной тогда и только тогда, когда после приведения ее к ступенчатому виду получается система с*

$$\overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\dots\overline{a}_{nn} \neq 0.$$

Обратим внимание на тот факт, то это условие не зависит от правых частей системы. Поэтому при $m = n$ система совместна и определенна тогда и только тогда, когда это верно для ассоциированной с ней однородной системы. Но однородная система всегда совместна: она имеет, например, нулевое решение.

Условие $\overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\dots\overline{a}_{nn} \neq 0$ означает, что однородная система обладает только нулевым решением.

Получаем

Следствие 2. *Линейная система в случае $m = n$ является совместной и определенной тогда и только тогда, когда ассоциированная с ней однородная система имеет только нулевое решение.*

Специального внимания заслуживает случай $n > m$.

Следствие 3. *Совместная система при $n > m$ является неопределенной. В частности, однородная система при $n > m$ всегда имеет ненулевое решение.*

Доказательство. Действительно, в любом случае $r \leqslant m$, поскольку в ступенчатой системе не больше уравнений, чем в исходной. Поэтому неравенство $n > m$ влечет $n > r$, что означает неопределенность системы. $\square$

Изложенные нами метод решения систем линейных уравнений называется *методом Гаусса* или *методом последовательного исключения неизвестных.*

МНОЖЕСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ

Под *множеством* понимают любую совокупность объектов, называемых *элементами множества.*

Множества с конечным числом элементов могут быть описаны путем явного перечисления всех их элементов; обычно эти элементы заключаются в фигурные скобки. Например, такие:

$$\{1, 2, a\}, \quad \{a, aa, abbb, 42\}.$$

Для некоторых особенно важных множеств приняты стандартные обозначения обозначения:

— $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

— $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

— $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;

— $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.

Для заданного множества S запись $a \in S$ означает, что элемент a содержится в множестве S, запись $a \notin S$ — что не содержится.

Говорят, что S — *подмножество* множества T, записывают это $S \subset T$, когда имеет место импликация

$$\forall x \; x \in S \Longrightarrow x \in T.$$

Два множества S и T совпадают (или равны), если у них одни и те же элементы. Символически это записывается так:

$$S = T \Longleftrightarrow S \subset T, \; T \subset S.$$

Пустое множество $\emptyset$, совсем не содержащее элементов, по определению входит в число подмножеств любого множества. Если $S \subset T$, но $S \neq \emptyset$, $S \neq T$, то S — *собственное* подмножество в T. Для выделения подмножества $S \subset T$ часто используют какое-либо свойство, присущее только элементам из S. Например,

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2m \text{ для некоторого } m \in \mathbb{Z}\}$$

— множество всех четных чисел, а

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$$

— множество натуральных чисел.

Под *пересечением* двух множеств S и T понимают множество

$$S \cap T = \{x \mid x \in S, x \in T\},$$

а под *объединением* — множество

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ или } x \in T\}.$$

Пересечение $S \cap T$ может быть пустым множеством. Тогда говорят, что S и T — непересекающиеся множества. Операции пересечения и объединения удовлетворяют тождествам

$$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T),$$
$$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cap T).$$

Разностью $S \setminus T$ множеств S и T называется совокупность тех элементов из S, которые не содержатся в T. Вместо $S \setminus T$ также пишут $S - T$.

Пусть далее X и Y — произвольные множества. Пару (x, y) элементов $x \in X$, $y \in Y$, взятых в данном порядке, будем называть *упорядоченной парой*, считая при этом, что $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Декартовым произведением двух множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар (x, y):

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Пусть, например, $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел. Тогда *декартов квадрат* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ есть просто множество всех декартовых точек на плоскости относительно заданных координатных осей. Аналогичным образом можно было бы ввести декартово произведение $X_1 \times X_2 \times X_3$ и т.д.

При $X_1 = X_2 = \ldots X_k$ пишут сокращенно

$$X^k = X \times X \times \cdots \times X$$

и говорят о k-й декартовой степени множества X.

Понятие *отображения* или *функции* играет центральную роль в математике. При заданных множествах X и Y отображение f с областью значений X и областью значений Y сопоставляет каждому элементу $x \in X$ элемент $f(x) \in Y$. В случае $X = Y$ говорят еще о преобразовании f множества X в себя. Символически пишут еще $f : X \to Y$.

Образом при отображении f называется множество всех элементов вида $f(x)$:

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in X\} = f(X) \subset Y.$$

Множество

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

называется *прообразом* элемента $y \in Y$. Более общо, для $Y_0 \subset Y$ положим

$$f^{-1}(Y_0) = \{x \in X \mid f(x) \subset Y_0\} = \cup_{y \in Y_0} f^{-1}(y).$$

Отображение называется *сюръективным*, когда $\operatorname{Im} f = Y$; оно называется *инъективным*, если из $x \neq x'$ следует $f(x) \neq f(x')$; *биективным* или *взаимно однозначным*, если оно одновременно сюръективно и инъективно.

Равенство отображений $f = g$ означает, что их соответствующие области совпадают:

$$f : X \to Y \text{ и } g : X \to Y,$$

причем $\forall x \in X \ f(x) = g(x)$. Сопоставление аргументу x, то есть элементу $x \in X$, значения $f(x) \in Y$ принято обозначать при помощи ограниченной стрелки $x \mapsto f(x)$.

Единичным или *тождественным* отображением $\mathrm{id}_X = e_X : X \to X$ называется отображение, переводящее каждый элемент $x \in X$ в себя. Если X — подмножество в Y, то иногда бывает полезным специальное отображение — *вложение* $i : X \to Y$, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет тот же самый элемент, но уже во множестве Y.

Отображение $f : X \to Y$ называется *сужением* или *ограничением* отображения $g : X' \to Y'$, когда $X \subset X'$, $Y \subset Y'$ и $\forall x \in X\ f(x) = g(x)$. В свою очередь g называется *продолжением* отображения f.

Также нам будет полезно говорить о функциях многих переменных. Введенное выше понятие декратовой степени X^n множества X дает возможность говорить о функции $f(x_1, \dots, x_n)$ многих переменных $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, просто как об обычном отображении $f : X^n \to Y$.

Произведением или *композицией* двух отображений $g : U \to V$ и $f : V \to W$ называется отображение

$$f \circ g : U \to W,$$

определенное условием

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) \quad \forall u \in U.$$

Вместо $f \circ g$ часто пишут просто fg. Ясно, что

$$fe_X = f, \quad e_Y f = f$$

для любого отображения $f : X \to Y$.

Теорема 6. *Композиция отображений подчиняется закону ассоциативности. Это значит, что если*

$$h : U \to V, \quad g : V \to W, \quad f : W \to T$$

— три отображения, то

$$f(gh) = (fg)h.$$

Доказательство. В соответствии с формальным определением равенства отображений нужно просто сравнить значения отбражений $f(gh) : U \to T$ и $(fg)h : U \to T$ в произвольном элементе $u \in U$:

$$(f(gh))(u) = f((ghu)) = f(g(hu)) = (fg)(hu) = ((fg)h)u.$$

$\square$