ЛЕКЦИЯ 21

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЗАМКНУТОСТЬ ПОЛЯ $\mathbb{C}$

РАЗЛОЖЕНИЕ НА НЕПРИВОДИМЫЕ В $\mathbb{R}[X]$

Итак, мы доказываем основную теорему алгебры.

Повторим последние два утверждения, сформулированные на последней лекции:

(1) *Каждый комплексный многочлен*

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad n \geqslant 0,$$

является непрерывной функцией в любой точке плоскости $\mathbb{C}$.

Другими словами, для любой окрестности точки $f(z_0)$ — $V = V(f(z_0))$ найдется такая окрестность точки z_0 — $U = U(z_0)$, что для всех $z \in U$ выполняется $f(z) \in V$.

(2) *Каждая непрерывная функция* $f : K \to \mathbb{R}$ *на компакте* $K \subset \mathbb{R}^2$ *достигает своего минимума* (напомним, что компакт — это замкнутое ограниченное подмножество плоскости).

Компактом у нас будет круг $|z| \leqslant r$ некоторого достаточно большого радиуса r, который мы определим далее.

Чтобы прояснить геометрическую идею доказательства, вообразим себе поверхность в $\mathbb{R}^3$, отвечающую уравнению $w = |f(z)|$: значения z изображаются на горизонтальной плоскости $\mathbb{R}^2$, а значения $|f(z)|$ откладываются вверх, в направлении оси w, перпендикулярной к $\mathbb{R}^2$. Из непрерывности функции $f(z)$ следует непрерывность функции $|f(z)|$ на всей плоскости $\mathbb{C}$. Нужно убедиться, что хотя бы в одной точке $w = 0$.

Последующие рассуждения разобьем на несколько шагов.

Лемма 1. *Существует положительное число $r \in \mathbb{R}$ такое, что*

$$|f(z)| > |f(0)|$$

для всех $z \in \mathbb{C}$, для которых $|z| > r$.

Доказательство. Действительно, для $z \neq 0$ имеем

$$|f(z)| = |z|^n |a_0 + g(z^{-1})|,$$

где

$$g(u) = a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_n u^n \in \mathbb{C}[u].$$

Из непрерывности функции g в нуле следует существование такого вещественного $\delta > 0$, что

$$|g(u)| \leqslant |a_0|/2 \text{ при } |u| < \delta.$$

Таким образом,

$$|f(z)| \geqslant |z|^n(|a_0| - |g(z^{-1})|) \geqslant \frac{1}{2}|a_0||z|^n$$

при $|z| > \delta^{-1}$. Следовательно, осталось выбрать любое вещественное число $r > \delta^{-1}$, для которого было бы выполнено неравенство

$$|a_0|r^n > 2|a_n|.$$

□

Следствие 1 (лемма Коши о минимуме)**.** *Для каждого многочлена $f \in \mathbb{C}[z]$ существует $z_0 \in \mathbb{C}$ такое, что*

$$|f(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|.$$

Доказательство. В самом деле, непрерывная функция $|f(z)|$ принимает в круге

$$D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$$

минимальное значение, то есть существует $z_0 \in D_r$ такое, что

$$|f(z_0)| = \inf_{z\in D_r} |f(z)|.$$

Но так как

$$|f(z_0)| \leqslant |f(0)|,$$

а по доказанной лемме имеет место неравенство

$$|f(0)| \leqslant \inf_{z\in\mathbb{C}\setminus D_r} |f(z)|,$$

то

$$|f(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|.$$

□

Лемма 2. *Пусть k — любое целое число $\geqslant 1$, и пусть $h \in \mathbb{C}[z]$ — многочлен с $h(0) \neq 0$.*

Тогда для каждого $a \in \mathbb{C}^*$ найдется такое $b \in \mathbb{C}$, что

$$|a + b^k h(b)| < |a|.$$

Доказательство. Будем исходить из факта непрерывности многочлена h: существует $\delta > 0$ такое, что при $|z| < \delta$ имеет место неравенство

$$|h(z) - h(0)| < |h(0)|/2.$$

Это позволяет нам получить оценку для

$$a + z^k h(z) = a + h(0)z^k + z^k(h(z) - h(0)) :$$

$$|a + z^k h(z)| \leqslant |a + h(0)z^k| + \frac{1}{2}|h(0)| \cdot |z|^k \qquad (*)$$

из круга $|z| < \delta$.

Выберем теперь комплексное число $b \in \mathbb{C}$, для которого

$$h(0)b^k = -ta, \quad 0 < t < 1$$

(ниже на вещественное число t будут наложены дополнительные ограничения).

В качестве b достаточно взять любой корень степени k из числа

$$-tah(0)^{-1} \neq 0.$$

Получаем
$$|a + h(0)b^k| = (1 - t)|a|$$
и
$$|h(0)| \cdot |b|^k/2 = t|a|/2,$$
что в соединении с $(*)$ приведет к нужному неравенству, так как $|b| < \delta$.

Мы обеспечим выполнение этого условия, наложив на
$$t = -h(0)a^{-1}b^k$$
ограничение
$$t < |h(0)a^{-1}|\delta^k.$$
Итак, подставив в $(*)$ значение $z = b$, $|b| < \delta$, получаем окончательно
$$|a + b^k h(b)| \leqslant (1 - t)|a| + \frac{1}{2}t|a| = \left(1 - \frac{1}{2}t\right)|a| < |a|.$$

□

Следствие 2 (лемма Даламбера–Аргана). *Пусть $f(z)$ — многочлен положительной степени над $\mathbb{C}$.*

Тогда каждой точке $c \in \mathbb{C}$ такой, что $f(c) \neq 0$, отвечает точка $c' \in \mathbb{C}$, для которой

$$|f(c')| < |f(c)|.$$

Доказательство. Для доказательства многочлен $f(z+c)$, подобно $f(z)$ не являющийся константой, разложим по степеням z:

$$f(z+c) = f(c) + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \cdots + b_n z^n, \quad b_k \neq 0.$$

Другими словами,

$$f(z+c) = f(c) + z^k h(z),$$

где

$$h(z) = b_k + b_{k+1} z + \cdots + b_n z^{n-k}, \quad h(0) \neq 0.$$

Подставив в формулировку леммы значение

$$a = f(c) \neq 0,$$

мы можем утверждать существование такого $b \in \mathbb{C}$, что при $c' = b + c$ будет выполнено требуемое неравенство:

$$|f(c')| = |f(b+c)| = |f(c) + b^k h(b)| < |f(c)|.$$

$\square$

Окончание доказательства основной теоремы.

По следствию к первой лемме существует такая точка $z_0 \in \mathbb{C}$, что $|f(z_0)| \leqslant |f(z)|$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Если $f(z_0) \neq 0$, то как утверждает следствие второй леммы, найдется такая точка $z_0' \in \mathbb{C}$, что

$$|f(z_0')| < |f(z_0)|$$

— противоречие.

Заметим, что явным аналогом первой леммы служит, очевидно

Лемма 3 (лемма о модуле старшего члена)**.** *Пусть $f(z)$ — многочлен вида*

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n, \quad n \geqslant 1,$$

с произвольными комплексными коэффициентами.

Положим

$$A = \max(|a_1|, \ldots, |a_n|), \quad r = \frac{A}{|a_0|} + 2.$$

Тогда при $|z| > r$ будет выполнено неравенство

$$|a_0 z^n| > |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n|.$$

Доказательство. Если взять $|z| > r$, то получим

$$|a_0| > \frac{A}{|z|-1},$$

откуда согласно правилам действий с модулями комплексных чисел будем иметь

$$\begin{aligned}
&|a_0 z^n| = |a_0||z|^n > \frac{A(|z|^n}{|z|-1} > \frac{A(|z|^n - 1}{|z|-1} = \\
&= A(|z|^{n-1} + \cdots + |z| + 1) \geqslant |a_1||z|^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}||z| + |a_n| = \\
&\quad = |a_1 z^{n-1}| + \cdots + |a_{n-1}z| + |a_n| \geqslant |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n).
\end{aligned}$$

□

Следствие 3. *Пусть многочлен*

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n, \quad n \geqslant 1,$$

имеет вещественные коэффициенты.

Тогда для всех $x \in \mathbb{R}$, достаточно больших по абсолютной величине, знак $f(x)$ совпадает со знаком старшего члена $a_0 x^n$.

Следствие 4. *Многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. Ввиду нечетности n старший члн a_0x^n нашего многочлена будет принимать при отрицательных и положительных значениях x разные знаки. По доказанной лемме для достаточно больших по модулю значений x знак $f(x)$ начнет совпадать со знаком старшего члена, то есть найдутся некоторое значение x, для которого значение $f(x)$ положительно, и значение x, для которого значение $f(x)$ отрицительно.

Но $f(x)$ непрерывная функция, поэтому принимает все промежуточные между любыми двумя значениями, то есть принимает и нулевое значение в некоторой действительной точке. $\square$

РАЗЛОЖЕНИЕ НА НЕПРИВОДИМЫЕ МНОЖИТЕЛИ В $\mathbb{R}[X]$

Из основной теоремы алгебры следует, что каждый многочлен f степени n в $\mathbb{C}[X]$ может быть записан, и притом единственным образом (с точностью до перестановки множителей), в виде

$$f(X) = a(X - c_1)(X - c_2)\dots(X - c_n),$$

где $a \neq 0$, $c_1, \dots, c_n$ — комплексные числа. Пусть теперь

$$f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n$$

— нормализованный многочлен с вещественными коэффициентами $a_, \dots, a_n$ и c — какой-то его комплексный корень:

$$c = u + iv, \quad v \neq 0.$$

Применяя к соотношению $f(c) = 0$ автоморфизм комплесного сопряжения, получим $f(\overline{c}) = 0$, поскольку $\overline{a}_i = a_i$. Таким образом, $f(X)$ делится на многочлен второй степени

$$\begin{aligned} g(X) = (X - c)(X - \overline{c}) = X^2 - (c + \overline{c})X + c\overline{c} = \\ = X^2 - 2uX + (u^2 + v^2) \end{aligned}$$

с отрицательным дискриминантом

$$D(g) = 4u^2 - 4(u^2 + v^2) = -4v^2 < 0.$$

Как мы знаем, условие $D(g) < 0$ необходимо и достаточно для неприводимости над $\mathbb{R}$ квадратного многочлена $g \in \mathbb{R}[X]$.

Если, далее, k — кратность корня c многочлена $f(X)$ и $l \leqslant k$ — кратность корня‘$\overline{c}$, то $f(X)$ делится на l-ю степень многочлена $g(X)$:

$$f(X) = g(X)^l q(X).$$

Частное двух многочленов из $\mathbb{R}[X]$ также является многочленом из $\mathbb{R}[X]$, причем при $k > l$ элемент $c \in \mathbb{C}$ будет его корнем кратности $k - l$, в то время как $\overline{c}$ корнем не является. Мы видели, однако, что так быть не может. Значит, $k = l$, то есть комплексные корни каждого многочлена с действительными коэффициентами разделяются на пары сопряженных (вместе с кратностями). Так образом, выполняется следующая теорема:

Теорема 1. *Любой нормализованный многочлен $f \in \mathbb{R}[X]$ степени n разлагается единственным образом (с точностью до порядка множителей) в произведение $m \leqslant n$ линейных многочленов $X - c_i$, соответствующих его вещественным корням $c_1, \ldots, c_m$, и $(n-m)/2$ квадратных многочленов, неприводимых над $\mathbb{R}$ и соответствующих парам комплексно сопряженных корней.*

Замечание 1. (1) Неприводимый многочлен из $\mathbb{R}[X]$ либо линеен, либо квадратичен с отрицательным дискриминантом.

(2) Имеет место соотношение

$$D(f) = (-1)^{(n-m)/2} |D(f)|.$$