ЛЕКЦИЯ 21

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ЛЕММЫ ШУРА

ХАРАКТЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ХАРАКТЕРОВ

СЛЕДСТВИЯ ЛЕММЫ ШУРА

Напомним предложение, доказанное на прошлой лекции:

Предложение 1. *Пусть* $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ *и* $\psi : G \to \mathrm{GL}(W)$ *— два неприводимых комплексных представления конечной группы* G *порядка* $|G|$ *и* $\sigma : V \to W$ *— произвольное линейное отображение.*

Тогда усредненное отображение

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \sigma \varphi(g)^{-1}$$

обладает следующими свойствами:

а) если φ *и* ψ *не эквивалентны, то* $\widetilde{\sigma} = 0$*;*

б) если $V = W$, $\varphi = \psi$, *то* $\tilde{\sigma} = \lambda E$, $\lambda = \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{\dim V}$.

Нам понадобится матричная формулировка этого предложения.

Выберем в пространствах V, W какие-нибудь базисы:

$$V = \langle e_i \mid i \in I \rangle, \quad W = \langle f_j \mid j \in J \rangle.$$

Отождествим наши отображения φ и ψ с соответствующими матрицами в заданных базисах:

$$\varphi_g = (\varphi(g)_{i,i'}), \quad \psi_g = (\psi(g)_{j,j'}).$$

Пусть $\sigma = (\sigma_{ji})$.

по определению $\tilde{\sigma}$ имеем

$$\widetilde{\sigma_{ji}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G, i' \in I, j' \in J} \psi_{j,j'}(g) \sigma_{j',i'} \varphi_{i',i}(g^{-1}).$$

Заметим, что отображение $\sigma : V \to W$ в предложении совершенно произвольно. Например, мы можем взять

$$\sigma_{ji} = 0 \text{ при } (j,i) \neq (j_0, i_0), \quad \sigma_{j_0,i_0} = 1.$$

Тогда первому утверждению предложения будет отвечать соотношение

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_{j,j_0}(g) \cdot \varphi_{i_0,i}(g^{-1}) = 0 \qquad (*)$$

для всех i, i_0, j, j_0 (мы считаем, что представления φ и ψ не эквивалентны).

Теперь пусть $V = W$, $\varphi = \psi$.

Следствие 1. *В матричной формулировке пункта (б) предыдущего предложения выполнено соотношение*

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} (\varphi(g))_{j,j_0} \cdot (\varphi(g^{-1}))_{i_0,i} = \begin{cases} \frac{\delta_{j,i}}{\dim V}, & \text{если } j_0 = i_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (**)$$

Доказательство. Так как в предыдущей задаче σ было произвольным эндоморфизмом пространства V, то снова выберем $\sigma = E_{j_0,i_0}$. Тогда

$$\tilde{\sigma}_{j,i} = |G|^{-1} \left(\sum_{g \in G} (\varphi(g)) E_{j_0,i_0} (\varphi(g^{-1})) \right)_{j,i} =$$

$$= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \left(\sum_k \varphi(g)_{k,j_0} E_{k,j_0} E_{j_0,i_0} \sum_l \varphi(g^{-1})_{i_0,l} E_{i_0,l} \right)_{j,i} =$$

$$= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \left(\sum_{k,l} \varphi(g)_{k,j_0} \varphi(g^{-1})_{i_0,l} E_{k,l} \right)_{j,i} =$$

$$= |G|^{-1} \sum_{g \in G} (\varphi(g))_{j,j_0} \cdot (\varphi(g^{-1}))_{i_0,i}.$$

$\square$

ХАРАКТЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Определение 1. *Характером* произвольного комплексного конечномерного линейного представления $\varphi : G \to \mathrm{GL}\,(V)$ группы G называется функция

$$\chi_\varphi : G \to \mathbb{C},$$

определенная соотношением

$$\chi_\varphi(g) = \mathrm{tr}\,\varphi(g), \quad g \in G.$$

Лемма 1. *Характеры эквивалентных представлений совпадают.*

Доказательство. Это утверждение совершенно очевидно, так как следы сопряженных матриц совпадают:

$$\mathrm{tr}\,(ABA^{-1}) = \mathrm{tr}\,((AB)(A^{-1})) = \mathrm{tr}\,(A^{-1}AB) = \mathrm{tr}\,B.$$

$\square$

Предложение 2. *Пусть* χ_φ — *характер комплексного линейного представления* $\varphi : G \to \mathrm{GL}\,(V)$. *Тогда*

а) $\chi_\varphi(e) = \dim V$;

б) $\chi_\varphi(hgh^{-1}) = \chi_\varphi(g)$ *для всех* $g, h \in G$;

в) $\chi_\varphi(g^{-1}) = \overline{\chi_\varphi(g)}$ *для любого элемента* $g \in G$ *конечного порядка;*

г) *прямой сумме* $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ *представлений отвечает характер* $\chi_\varphi = \chi_{\varphi_1} + \chi_{\varphi_2}$.

Доказательство. а) Единичный элемент группы G всегда отображается в единичную матрицу, след которой равен размерности пространства.

б) Также следует из того, что у сопряженных матриц след совпадает.

в) Если элемент $g \in G$ имеет конечный порядок, то $\varphi(g)$ обязательно диагонализируем, так как его жорданова нормальная форма не может содержать жордановых клеток размера, большего одного:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & * & * \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & * \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

то есть ни одна степень этой клетки не будет единичной матрицей, так как на месте $(1,2)$ у нее всегда будет стоять ненулевой элемент $n\lambda^{n-1}$.

Если матрица $\varphi(g)$ диагонализируема, то можно считать, что она диагональна. При это на диагонали стоят корни n-ой степени из 1, т.е. числа вида

$$\cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Обратные элементы имеют вид

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = \overline{\cos\alpha + i\sin\alpha}.$$

Таким образом, если

$$\varphi(g) = ADA^{-1}, \quad D = \operatorname{diag}[z_1, \dots, z_m],$$

то

$$\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} = AD^{-1}A^{-1} = A\overline{D}A^{-1}.$$

Тогда ясно, что $\chi_\varphi(g^{-1}) = \overline{\chi_\varphi(g)}$.

г) Очевидно. $\square$

Определение 2. Пространство $\mathbb{C}^G$ — это множество всех функций из группы G в поле $\mathbb{C}$, снабженное структурой векторного пространства. Функция их $\mathbb{C}^G$ называется *центральной*, если она постоянна на сопряженных классах группы G.

Лемма 2. *Если группа G конечна, то скалярное произведение*

$$(\sigma, \tau)_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g)\overline{\tau(g)}, \quad \sigma, \tau \in \mathbb{C}^G,$$

превращает $\mathbb{C}^G$ в эрмитово пространство.

Доказательство. Ясно, что $(\cdot, \cdot)_G$ является полутралинейной формой на пространстве $\mathbb{C}^G$. Нам нужно только проверить положительную определенность.

Действительно,

$$(\sigma, \sigma)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g)\overline{\sigma(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\sigma(g)|^2 > 0,$$

если $\sigma \neq 0$. $\square$

СВОЙСТВО ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ХАРАКТЕРОВ

Теорема 1. *Пусть φ, ψ — неприводимые комплексные представления конечной группы G. Тогда*

$$(\chi_\varphi, \chi_\psi)_G = \begin{cases} 1, & \textit{если } \varphi \sim \psi, \\ 0, & \textit{если } \varphi \not\sim \psi. \end{cases}$$

Доказательство. 1. Пусть $\varphi \sim \psi$. Тогда, как мы показывали выше, $\chi_\varphi = \chi_\psi$. Таким образом,

$$(\chi_\varphi, \chi_\varphi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{tr}(\varphi(g))|^2 =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(\varphi(g)) \operatorname{tr}(\varphi(g^{-1})) =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(g)_{i,i} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi(g^{-1})_{j,j} \right) =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(g)_{i,i} \varphi(g^{-1})_{j,j} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{g \in G} \varphi(g)_{i,i} \varphi(g^{-1})_{j,j} \right).$$

Однако по $(**)$

$$|G|^{-1}\sum_{g\in G}(\varphi(g))_{j,j_0}\cdot(\varphi(g^{-1}))_{i_0,i} = \begin{cases} \frac{\delta_{j,i}}{\dim V}, & \text{если } j_0 = i_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Значит, слагаемые, у которых $i \neq j$, будут равны нулю, поэтому вся сумма будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{g\in G}\varphi(g)_{i,i}\varphi(g^{-1})_{i,i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, первое утверждение доказано.

Теперь применим соотношение $(*)$:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_{j,j_0}(g)\cdot\varphi_{i_0,i}(g^{-1}) = 0.$$

Положим в нем $i_0 = i$, $j_0 = j$ и просуммируем по i и

j, после чего получим

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{1}{|G|}\sum_{g,i,j}\psi_{j,j}(g)\varphi_{i,i}(g^{-1}) = \\
= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\sum_{j}\psi_{j,j}(g)\right)\left(\sum_{i}\varphi_{ii}(g^{-1})\right) = \\
= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\psi}(g)\chi_{\varphi}(g^{-1}) = \\
= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\psi}(g)\overline{\chi_{\varphi}(g)} = (\chi_{\psi},\chi_{\varphi})_G.
\end{aligned}
$$

$\square$

Следствие 2. *Пусть*

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_k$$

— разложение комплексного представления φ (группы G) в прямую сумму неприводимых представлений.

Если ψ — какое-то неприводимое комплексное представление той же группы, то число слагаемых в разложении φ, изоморфных ψ, равно

$$(\chi_V, \chi_W)_G$$

и не зависит от способа разложения (кратность вхождения ψ в φ).

Два представления с одним и тем же характером изоморфны.

Доказательство. Как мы отмечали выше,

$$\chi_\varphi = \chi_{\varphi_1} + \cdots + \chi_{\varphi_k},$$

поэтому

$$(\chi_\varphi, \chi_\psi)_G = (\chi_{\varphi_1}, \chi_\psi)_G + \cdots + (\chi_{\varphi_k}, \chi_\psi)_G.$$

По только что доказанной теореме справа стоит сумма единиц и нулей, причем число единиц совпадает с числом представлений φ_i, изоморфных ψ.

Но скалярное произведение слева $(\chi_\varphi, \chi_\psi)_G$ вообще не зависит от какого-либо разложения, так что мы уже доказали инвариантность кратности вхождения ψ в φ.

Два представления φ, φ' группы G с одним и тем же характером $\chi = \chi_\varphi = \chi_{\varphi'}$ содержат в своих разложениях любое слагаемое, изоморфное данному неприводимому представлению ψ, одинаковое число раз, а именно $(\chi, \chi_\psi)_G$.

Поэтому в разложениях

$$\varphi = \oplus_{i=1}^{k} \varphi_i, \qquad \varphi' = \oplus_{j=1}^{l} \varphi'_j$$

на неприводимые прямые слагаемые мы можем считать $l = k$, $\varphi'_i \cong \varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Следовательно, изоморфны и сами представления φ, φ'. $\square$

РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Определение 3. *Регулярным* представлением конечной группы $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ называется n-мерное представление ρ, в котором $\rho(g_i)e_k = e_l$, если $g_i g_k = g_l$.

Упражнение 1. Найдите регулярное представление групп $\mathbb{Z}_3$, $\mathbf{V}_4$.