ЛЕКЦИЯ 2

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАЛЫХ ПОРЯДКОВ

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Пусть нам дана еще одна линейная система того же размера

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Будем говорить, что штрихованная система получена из исходной с помощью *элементарного преобразования типа* (I), если в новой системе все уравнения остались прежними, только какие-то два поменялись местами.

Если же в штрихованной системе все уравнения те же, что и в исходной, и только i-е уравнение выглядит как

$$(a_{i1} + ca_{k1})x_1 + (a_{i2} + ca_{k2})x_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{kn})x_n = b_i + cb_k,$$

где c — какое-то число, то полагаем, что к системе применено элементарное преобразование типа (II).

Линейные системы называются *эквивалентными*, если они либо обе несовместны, либо совместны и обладают одним и тем же множеством решений.

Если обозначать эквивалентность систем как $(a) \sim (b)$, то можно заметить, что

(1) $(a) \sim (a)$;

(2) из $(a) \sim (b)$ следует $(b) \sim (a)$;

(3) из $(a) \sim (b)$ и $(b) \sim (c)$ следует $(a) \sim (c)$.

Достаточный признак эквивалентности систем содержится в следующем утверждении:

Теорема 1. *Две линейные системы эквивалентны, если одна получается из другой путем применения конечной последовательности элементарных преобразований.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если система $(**)$ получена из системы $(*)$ применением одного элементарного преобразования, то системы $(**)$ и $(*)$ эквивалентны.

Заметим, что система $(*)$ получается из системы $(**)$ также применением одного элементарного преобразования: в случае первого типа нужно снова поменять местами два уравнения, в случае второго типа — прибавив к i-му уравнению в $(**)$ k-ое, умноженное на $(-c)$, мы получим i-е уравнение системы $(*)$.

Докажем теперь, что любое решение $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ системы $(*)$ является также решением системы $(**)$, этого благодаря замечанию будет достаточно.

Действительно, пусть у нас есть решение системы $(*)$, тогда при подставление его в каждое уравнение системы $(*)$ мы получаем верное равенство. Если система $(**)$ получилась из системы $(*)$ с помощью элементарного преобразования первого типа, то все уравнения в ней те же (только местами переставлены), поэтому тоже при подставлении набора $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ обращаются в верные равенства. Если система $(**)$ получена из системы $(*)$ элементарным преобразованием второго типа, то все уравнения, кроме i-го, автоматически обращаются в верные равенство, а i-е обращается, потому что является суммой верного равенства и еще одного врного равенства, умноженного на число c.

Теорема доказана.

$\square$

ПРИВЕДЕНИЕ К СТУПЕНЧАТОМУ ВИДУ

Путем последовательного применения элементарных преобразований можно перейти от заданной системы уравнений к системе более простого вида.

Во-первых, заметим, что среди коэффициентов a_{i1} имеется хотя бы один, отличный от нуля. В противном случае не имело бы смысла вообще говорить о переменной x_1.

Если $a_{11} = 0$, то так поменяем местами уравнения, чтобы в новой системе $a'_{11} \neq 0$.

Вычтем из каждого уравнения новой системы, начиная со второго, первое уравнение, умноженное на a'_{11}/a_{i1}.

Таким образом, мы получим новую систему, в которую x_1 входит только в первое уравнение.

При этом может оказаться, что вторая неизвестная также не входит во все уравнения с номером $i > 1$.

Пусть x_k — неизвестная с наименьшим номером, входящая в какое-то уравнение, отличное от первого.

Мы получим систему

$$
\begin{array}{lll}
a'_{11}x_1 + & & \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\
 & a'_{2k}x_k + & \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\
 & \multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\
 & a'_{mk}x_k + & \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m.
\end{array}
$$

Не обращая внимание на первое уравнение, применим к оставшимся те же рассуждения, что и раньше.

В результате получим систему

$$\begin{array}{llll}
a''_{11}x_1+ & & & \cdots + a''_{1n}x_n = b''_1, \\
& a''_{2k}x_k+ & & \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\
& & a''_{3l}x_l+ & \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3, \\
& & \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
& & a''_{ml}x_l+ & \cdots + a''_{mn}x_n = b''_m.
\end{array}$$

Будем применять этот процесс до тех пор, пока возможно. Ясно, что мы будем вынуждены остановиться не только когда станут равными коэффициенты при очередной неизвестной, но и когда станут равными нулю коэффициенты при всех остальных переменных, вплоть до n-й.

При этом наша система примет вид

$$\begin{array}{llllcc}
\overline{a}_{11}x_1+ & & & & \cdots + \overline{a}_{1n}x_n & = & \overline{b}_1, \\
& \overline{a}_{2k}x_k+ & & & \cdots + \overline{a}_{2n}x_n & = & \overline{b}_2, \\
& & \overline{a}_{3l}x_l+ & & \cdots + \overline{a}_{3n}x_n & = & \overline{b}_3, \\
& & & \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
& & & \overline{a}_{rs}x_s+ & \cdots + \overline{a}_{rn}x_n & = & \overline{b}_r, \\
& & & & 0 & = & \overline{b}_{r+1}, \\
& & & & \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
& & & & 0 & = & \overline{b}_m.
\end{array}$$

Здесь

$$\overline{a}_{11}\overline{a}_{2k}\overline{a}_{3l}\dots\overline{a}_{rs} \neq 0.$$

Такая система называется *системой линейных уравнений в ступенчатом виде.*

Понятно, что может оказаться, что $r = n$, то есть уравнений типа $0 = \overline{b}_t$ просто нет.

Полученная нами сейчас система уравнений называется *системой уравнений в ступенчатом виде.*

Теорема 2. *Всякая система линейных уравнений эквивалентна системе, имеющей ступенчатый вид.*

Доказательство. Доказательство непосредственно вытекает из предыдущих рассуждений. □

Элементарные преобразования иногда удобно производить не над системой, а над ее расширенной матрицей $(a_{ij} \mid b_i)$. Точно так же, как и предыдущая теорема, доказывается

Теорема 3. *Всякую матрицу можно при помощи элементарных преобразований привести к ступенчатому виду.*

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ввиду доказанных теорем вопросы совместности и определенности достаточно исследовать только для систем ступенчатого вида.

Начнем с вопроса совместности. Очевидно, что если система содержит уравнение

$$0 = \overline{b}_i, \quad b_i \neq 0,$$

то система несовместна.

Докажем, что если таких уравнений в системе нет, то она совместна.

Пусть $\overline{b}_t = 0$ при $t > r$.

Назовем неизвестные $x_1, x_k, x_l, \ldots, x_s$, с которых начинаются наши новые уравнения, *главными*, а остальные переменные — свободными. Главных переменных по определению всего r.

Придадим свободным неизвестным произвольные значения и подставим их во все уравнения системы. Тогда для x_s получится одно (r-ое) уравнение вида $ax_s = b$, $a = \overline{a}_{rs} \neq 0$, которое имеет единственное решение. Подставим найденное значение $x_s = x_s^0$ в первые $r-1$ уравнений и, поднимаясь так снизу вверх по системе, мы убедимся, что значения главных неизвестных определяются однозначно при любых заданных значениях для свободных неизвестных.

Нами доказана

Теорема 4. *Для совместности системы линейных уравнений необходимо и достаточно, чтобы после приведения ее к ступенчатому виду не оказалось бы уравнений вида* $0 = \overline{b}_t$ *с* $\overline{b}_t \neq 0$. *Если это условие выполнено, то свободным переменным можно придать произвольные значения; главные неизвестные (при заданных значениях для свободных) однозначно определяются из системы.*

Выясним теперь, когда система будет определенной, в предположении, что введенное нами условие совместности выполнено.

Если в системе имеются свободные неизвестные, то она заведомо неопределенная, потому что мы можем придать свободным неизвестным любые значения. Если же свободных неизвестных нет, и все неизвестные главные, то они определяются из системы однозначно, то есть система является определенной.

Остается заметить, что отсутствие свободных переменных равносильно условию $r = n$.

Мы доказали следующее утверждение:

Теорема 5. *Совместная линейная система является определенной тогда и только тогда, когда в полученной из нее ступенчатой системе выполняется равенство* $r = n$.

При $m = n$ линейную систему, приведенную к ступенчатому виду, можно записать еще так (*треугольный вид*):

$$\begin{array}{llll}
\overline{a}_{11}x_1+ & \overline{a}_{12}x_2+ & & \dots + \overline{a}_{1n}x_n = \overline{b}_1, \\
 & \overline{a}_{22}x_2+ & & \dots + \overline{a}_{2n}x_n = \overline{b}_2, \\
 & & \overline{a}_{33}x_3+ & \dots + \overline{a}_{3n}x_n = \overline{b}_3, \\
 & & \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
 & & & \qquad\quad \overline{a}_{nn}x_n = \overline{b}_n,
\end{array}$$

если не заботиться о том, чтобы выполнялось условие $\overline{a}_{ii} \neq 0$ для всех i.

Заметим на будущее, что матрица (a_{ij}) с элементами $a_{ij} = 0$ для $i > j$ называется *верхней треугольной*. Аналогично определяется нижняя треугольная матрица.

Из доказанных теорем вытекает

Следствие 1. *Линейная система в случае $n = m$ является совместной и определенной тогда и только тогда, когда после приведения ее к ступенчатому виду получается система с*

$$\overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\dots\overline{a}_{nn} \neq 0.$$

Обратим внимание на тот факт, то это условие не зависит от правых частей системы. Поэтому при $m = n$ система совместна и определенна тогда и только тогда, когда это верно для ассоциированной с ней однородной системы. Но однородная система всегда совместна: она имеет, например, нулевое решение.

Условие $\overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\dots\overline{a}_{nn} \neq 0$ означает, что однородная система обладает только нулевым решением.

Получаем

Следствие 2. *Линейная система в случае $m = n$ является совместной и определенной тогда и только тогда, когда ассоциированная с ней однородная система имеет только нулевое решение.*

Специального внимания заслуживает случай $n > m$.

Следствие 3. *Совместная система при $n > m$ является неопределенной. В частности, однородная система при $n > m$ всегда имеет ненулевое решение.*

Доказательство. Действительно, в любом случае $r \leqslant m$, поскольку в ступенчатой системе не больше уравнений, чем в исходной. Поэтому неравенство $n > m$ влечет $n > r$, что означает неопределенность системы. $\square$

Изложенные нами метод решения систем линейных уравнений называется *методом Гаусса* или *методом последовательного исключения неизвестных.*

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ НЕБОЛЬШИХ ПОРЯДКОВ

Излагая метод Гаусса, мы не слишком заботились о значениях коэффициентов при главных неизвестных. Важно было лишь то, что эти коэффициенты отличны от нуля.

Проведем теперь более аккуратный процесс исключения неизвестных хотя бы в случае квадратных линейных систем небольших размеров. Это даст нам пищу для размышлений и исходный материал для построения в будущем общей теории определителей.

Рассмотрим для начала систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

и постараемся найти общие формулы для компонент x_1^0, x_2^0 ее решения.

Назовем *определителем* матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

выражение

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

и обозначим его

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Если мы попытаемся исключить x_2 из нашей исходной системы, умножив первое уравнение на a_{22} и прибавив к нему второе, умноженное на $-a_{12}$, то получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}.$$

Правую часть также можно рассматривать как определитель матрицы $\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$. Предположим, что $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда мы имеем

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_1 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Имея формулы для решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, мы можем решать и некоторые другие системы. Рассмотрим, например, систему двух однородных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases}$$

Нас интересует ненулевое решение этой системы, так что хотя бы одно из x_i не равно нулю. Пусть, например, $x_3 \neq 0$. Разделив обе части на x_3 и положив $y_1 = -x_1/x_3$, $y_2 = -x_2/x_3$, запишем исходную систему в таком виде:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = a_{13}, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = a_{23}. \end{cases}$$

Это уже знакомый нам вид, такие системы мы умеем решать. При предположении $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ выписанные формулы дают

$$y_1 = -\frac{x_1}{x_3} = \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y_2 = -\frac{x_2}{x_3} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Таким образом, можно считать, что любое ненулевое решение пропорционально такому:

$$x_1 = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Для более симметричного ответа заметим, что если поменять в матрице 2×2 два столбца местами, то определитель поменяет знак, и запишем:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Эти формулы введены в предположении, что $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Нетрудно проверить, что доказанное утверждение верно, если хоть один из входящих в выражение определителей отличен от нуля.

Упражнение 1. А что будет происходить с решением, если все три определителя равны нулю?

Перейдем теперь к случаю системы из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{32}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Мы хотим исключить из этой системы x_2 и x_3, чтобы получить значение x_1. С этой целью умножим первое уравнение на c_1, второе — на c_2, третье — на c_3 и сложим их. Подберем c_1, c_2, c_3 так, чтобы в сумме коэффициенты при x_2 и x_3 обратились бы в ноль.

Приравнивая соответствующие коэффициенты, мы получим для c_1, c_2 и c_3 систему уравнений

$$\begin{cases} a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{32}c_3 = 0, \\ a_{13}c_1 + a_{23}c_2 + a_{33}c_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система относится к только что рассмотренному типу, мы знаем, как ее решать.

Поэтому можно взять

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad c_2 = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad c_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

После очевидных манипуляций мы получаем для x_1 выражение

$$\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}\right) x_1 =$$

$$= b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Коэффициент при x_1 называется *определителем* матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и обозначается

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, за определитель третьего порядка мы берем выражение

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Легко заметить, что правая часть в равенстве для x_1 получается из коэффициента при x_1 заменой a_{11} на b_1, a_{21} на b_2 и a_{31} на b_3. Поэтому равенство для x_1 можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Предположим, что коэффициент при x_1 отличен от нуля. Тогда, проведя аналогичные рассуждения для x_2 и x_3, мы выразим соответствующие x_1, x_2, x_3 в виде

$$\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

Очевидно, что те же самые рассуждения применимы к системам из четырех, пяти и т.д. уравнений с тем же числом неизвестных. Для этого нам надо сначала вывести формулы для решения однородной системы из трех уравнений с четырьмя неизвестными, потом в системе из четырех уравнений с четырьмя неизвестными исключить x_2, x_3, x_4, умножая уравнения на c_1, c_2, c_3, c_4 и складывая их. Мы далее найдем значения c_1, $i = 1, 2, 3, 4$, из системы трех однородных уравнений.

Коэффициент, получающийся при x_1 и строящийся из определителей третьего порядка по предыдущему образцу, мы назовем *определителем четвертого порядка.*