ЛЕКЦИЯ 3

МНОЖЕСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ

МНОЖЕСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ

Под *множеством* понимают любую совокупность объектов, называемых *элементами множества.*

Множества с конечным числом элементов могут быть описаны путем явного перечисления всех их элементов; обычно эти элементы заключаются в фигурные скобки. Например, такие:

$$\{1, 2, a\}, \quad \{a, aa, abbb, 42\}.$$

Для некоторых особенно важных множеств приняты стандартные обозначения обозначения:

— $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

— $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

— $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;

— $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.

Для заданного множества S запись $a \in S$ означает, что элемент a содержится в множестве S, запись $a \notin S$ — что не содержится.

Говорят, что S — *подмножество* множества T, записывают это $S \subset T$, когда имеет место импликация

$$\forall x \; x \in S \Longrightarrow x \in T.$$

Два множества S и T совпадают (или равны), если у них одни и те же элементы. Символически это записывается так:

$$S = T \Longleftrightarrow S \subset T, \; T \subset S.$$

Пустое множество $\emptyset$, совсем не содержащее элементов, по определению входит в число подмножеств любого множества. Если $S \subset T$, но $S \neq \emptyset$, $S \neq T$, то S — *собственное* подмножество в T. Для выделения подмножества $S \subset T$ часто используют какое-либо свойство, присущее только элементам из S. Например,

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2m \text{ для некоторого } m \in \mathbb{Z}\}$$

— множество всех четных чисел, а

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$$

— множество натуральных чисел.

Под *пересечением* двух множеств S и T понимают множество

$$S \cap T = \{x \mid x \in S, x \in T\},$$

а под *объединением* — множество

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ или } x \in T\}.$$

Пересечение $S \cap T$ может быть пустым множеством. Тогда говорят, что S и T — непересекающиеся множества. Операции пересечения и объединения удовлетворяют тождествам

$$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T),$$
$$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cap T).$$

Разностью $S \setminus T$ множеств S и T называется совокупность тех элементов из S, которые не содержатся в T. Вместо $S \setminus T$ также пишут $S - T$.

Пусть далее X и Y — произвольные множества. Пару (x, y) элементов $x \in X$, $y \in Y$, взятых в данном порядке, будем называть *упорядоченной парой*, считая при этом, что $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Декартовым произведением двух множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар (x, y):

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Пусть, например, $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел. Тогда *декартов квадрат* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ есть просто множество всех декартовых точек на плоскости относительно заданных координатных осей. Аналогичным образом можно было бы ввести декартово произведение $X_1 \times X_2 \times X_3$ и т.д.

При $X_1 = X_2 = \ldots X_k$ пишут сокращенно

$$X^k = X \times X \times \cdots \times X$$

и говорят о k-й декартовой степени множества X.

Понятие *отображения* или *функции* играет центральную роль в математике. При заданных множествах X и Y отображение f с областью значений X и областью значений Y сопоставляет каждому элементу $x \in X$ элемент $f(x) \in Y$. В случае $X = Y$ говорят еще о преобразовании f множества X в себя. Символически пишут еще $f : X \to Y$.

Образом при отображении f называется множество всех элементов вида $f(x)$:

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in X\} = f(X) \subset Y.$$

Множество

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

называется *прообразом* элемента $y \in Y$. Более общо, для $Y_0 \subset Y$ положим

$$f^{-1}(Y_0) = \{x \in X \mid f(x) \subset Y_0\} = \cup_{y \in Y_0} f^{-1}(y).$$

Отображение называется *сюрѣективным*, когда $\operatorname{Im} f = Y$; оно называется *инѣективным*, если из $x \neq x'$ следует $f(x) \neq f(x')$; *биективным* или *взаимно однозначным*, если оно одновременно сюръективно и инъективно.

Равенство отображений $f = g$ означает, что их соответствующие области совпадают:

$$f : X \to Y \text{ и } g : X \to Y,$$

причем $\forall x \in X \;\; f(x) = g(x)$. Сопоставление аргументу x, то есть элементу $x \in X$, значения $f(x) \in Y$ принято обозначать при помощи ограниченной стрелки $x \mapsto f(x)$.

Единичным или *тождественным* отображением $\mathrm{id}_X = e_X : X \to X$ называется отображение, переводящее каждый элемент $x \in X$ в себя. Если X — подмножество в Y, то иногда бывает полезным специальное отображение — *вложение* $i : X \to Y$, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет тот же самый элемент, но уже во множестве Y.

Отображение $f : X \to Y$ называется *сужением* или *ограничением* отображения $g : X' \to Y'$, когда $X \subset X'$, $Y \subset Y'$ и $\forall x \in X\ f(x) = g(x)$. В свою очередь g называется *продолжением* отображения f.

Также нам будет полезно говорить о функциях многих переменных. Введенное выше понятие декратовой степени X^n множества X дает возможность говорить о функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ многих переменных $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$, просто как об обычном отображении $f : X^n \to Y$.

Произведением или *композицией* двух отображений $g : U \to V$ и $f : V \to W$ называется отображение

$$f \circ g : U \to W,$$

определенное условием

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) \quad \forall u \in U.$$

Вместо $f \circ g$ часто пишут просто fg. Ясно, что

$$fe_X = f, \quad e_Y f = f$$

для любого отображения $f : X \to Y$.

Теорема 1. *Композиция отображений подчиняется закону ассоциативности. Это значит, что если*

$$h : U \to V, \quad g : V \to W, \quad f : W \to T$$

— три отображения, то

$$f(gh) = (fg)h.$$

Доказательство. В соответствии с формальным определением равенства отображений нужно просто сравнить значения отбражений $f(gh) : U \to T$ и $(fg)h : U \to T$ в произвольном элементе $u \in U$:

$$(f(gh))(u) = f((ghu)) = f(g(hu)) = (fg)(hu) = ((fg)h)u.$$

$\square$

Композиция отображений $X \to X$ некоммутативна, то есть $fg \neq gf$. В этом легко убедиться на примере, когда $X = \{a, b\}$, $f(a) = b$, $f(b) = a$, $g(a) = a$, $g(b) = a$.

Некоторые отображения имеют *обратные*. Предположим, что $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ — какие-то отображения, так что композиции fg и gf определены. Если $fg = e_Y$, то f называется *левым обратным* к g, а g — *правым обратным* к f.

Когда произведения в любом порядке являются единичными отображениями:

$$fg = e_Y, \quad gf = e_X,$$

то f и g — просто взаимно *обратные* отображения. В этом случае пишут $g = f^{-1}$.

Понятно, что тогда из $v = f(u)$ следует $u = f^{-1}(v)$.

Лемма 1. *Если у отображения $f : X \to Y$ есть обратное отображение $g : Y \to X$, то оно определено однозначно.*

Доказательство. Действительно, пусть у отображения $f : X \to Y$ есть еще обратное отображение $h : Y \to X$. Рассмотрим произвольный элемент $v \in Y$. Из того, что $fg = fh = e_Y$, следует

$$fg(v) = fh(v) = v.$$

Пусть $g(v) = u$, $h(v) = u'$. Значит, $f(u) = f(u') = v$. Так как $gf = hf = e_X$, получаем

$$u = gf(u) = g(v) = h(v).$$

Таким образом, $g(v) = h(v)$ для любого $v \in Y$, поэтому $g = h$. □

Лемма 2. *Если*

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to X$$

— любые отображения, для которых $gf = e_X$, то f инъективно, а g сюръективно.

Доказательство. Пусть $x, x' \in X$, $f(x) = f(x')$.

Тогда

$$x = e_X(x) = (gf)(x) = g(fx) = g(fx') = (gf)x' = e_X(x') = x'.$$

Значит, f инъективно.

Если теперь x — любой элемент из X, то

$$x = e_X(x) = (gf)x = g(fx),$$

что доказывает сюръективность отображения g. □

Теорема 2. *Отображение $f : X \to Y$ тогда и только тогда имеет обратное, когда оно взаимно однозначно (биективно).*

Доказательство. Предположим вначале, что f обладает обратным, $g = f^{-1}$. Тогда из предыдущей леммы вытекает, что f инъективно и сюръективно, то есть биективно.

Теперь предположим, что f биективно. Это значит, что для любого $y \in Y$ мы можем найти *единственный* элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$. Положив $g(y) = x$, мы определим отображение $g : X \to Y$ со свойствами обратного к f отображения. Значит, $f^{-1} = g$. $\square$

Следствие 1. *Из биективности отображения $f : X \to Y$ вытекает биективность обратного отображения, причем*

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Пусть, далее, $f : X \to Y$, $h : Y \to Z$ — биективные отображения.

Тогда биективна и их композиция hf, причем

$$(hf)^{-1} = f^{-1}h^{-1}.$$

Доказательство. По предыдущей теореме биективность f влечет существование f^{-1}, что в силу той же теоремы эквивалентно биективности f^{-1}.

Условия $f^{-1}f = e_X$, $ff^{-1} = e_Y$ сразу дают условие $(f^{-1})^{-1} = f$.

Далее, по условию и доказанной теореме существуют обратные отображения

$$f^{-1} : Y \to X \text{ и } h^{-1} : Z \to Y$$

и их композиция

$$f^{-1}h^{-1} : Z \to X.$$

Из равенств

$$(hf)(f^{-1}h^{-1}) = ((hf)f^{-1})h^{-1} = (h(ff^{-1}))h^{-1} = hh^{-1} = e_Z,$$
$$(f^{-1}h^{-1})(hf) = f^{-1}(h^{-1}(hf)) = f^{-1}(h^{-1}h)f = f^{-1}f = e_X$$

вытекает, что $f^{-1}h^{-1}$ — обратное отображение к hf. □

Отображение следования $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, сопоставляющее каждому натуральному числу следующее за ним натуральное число, является инъективным, но не сюръективным.

Для конечных множеств подобное невозможно:

Теорема 3. *Если X — конечное множество и отображение $f : X \to X$ инъективно, то оно сюръективно.*

Доказательство. Нам нужно только показать, что f сюръективно, то есть для любого $x \in X$ существует $x' \in X$ такое, что $f(x') = x$. Положим

$$f^k(x) = f(f \dots (fx) \dots) = f(f^{k-1}x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В силу конечности X в этой последовательности должны быть повторения. Пусть, скажем, $f^m(x) = f^n(x)$, $m >$. Если $n > 0$, то из $f(f^{m-1}x) = f(f^{n-1}x)$ и из инъективности f следует равенство $f^{m-1}(x) = f^{n-1}(x)$. Повторив достаточное число раз сокращение f, мы придем к равенству

$$f^{m-n}(x) = f^0(x) = e_X(x) = x.$$

В таком случае для $x' = f^{m-n-1}(x)$ выполнено как раз $f(x') = x$. $\square$

Легко понять, что сюръективное преобразование конечного множества в себя также биективно.

Говорят, что два множества X и Y имеют *одинаковую мощность*, если между ними существует биективное отображение.

Множества той же мощности, что и $\mathbb{N}$, называются *счетными*.