ЛЕКЦИЯ 6

ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ И ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

ОСНОВНАЯ ЛЕММА О ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

РАНГ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ И ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Введем понятие линейных комбинаций и линейной оболочки системы векторов.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — векторы пространства $\mathbb{R}^n$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — скаляры (числа). Вектор $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k$ называется *линейной комбинацией* векторов X_i с коэффициентами α_i.

Пусть теперь $Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k$ — линейная комбинация тех же векторов X_i с коэффициентами β_i. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned}\alpha X + \beta Y &= \\ &= \alpha(\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k) + \beta(\beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k) = \\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)X_1 + \cdots + (\alpha\alpha_k + \beta\beta_k)X_k\end{aligned}$$

— снова линейная комбинация векторов X_i.

Мы видим, что множество V всех линейных комбинаций системы векторов $X_1, X_2, \ldots, X_k$ обладает свойством

$$X, Y \in V \Longrightarrow \alpha X + \beta Y \in V$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. В частности, нулевой вектор всегда содержится в V.

Обычно такое V обозначают символом $\langle X_1, X_2, \ldots, X_k \rangle$ и называют *линейной оболочкой* системы векторов $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Говорят еще, что оболочка $\langle X_1, \ldots, X_k \rangle$ *натянута* на $X_1, \ldots, X_k$ или *порождена* векторами $X_1, \ldots, X_k$.

Можно определить линейную оболочку любого подмножества $S \subset \mathbb{R}^n$, понимая под $\langle S \rangle$ совокупность всех линейных комбинаций конечных систем векторов из S. Ясно, что если V — линейная оболочка в $\mathbb{R}^n$, то $\langle V \rangle = V$: любая линейная комбинация векторов из V принадлежит V. В частности,

$$S \subset V \Longrightarrow \langle S \rangle \subset V,$$

т. е. линейную оболочку $\langle S \rangle$ можно определить как пересечение всех оболочек, содержащих данное множество S векторов из $\mathbb{R}^n$:

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset V} V.$$

На первый взгляд не очевидно, что стоящее в правой части выражения пересечение $\cap V$ какого-то множества оболочек будет линейной оболочкой. Но если $X, Y \in \cap V$, то $X, Y \in V$ для каждой оболочки V, входящей в множество. Значит, $\alpha X + \beta Y \in V$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а это и дает нужное включение $\alpha X + \beta Y \in \cap V$. Напротив, объединение $U \cup V$ оболочек U и V, вообще говоря, не является оболочкой, как показывает хотя бы пример

$$U = \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{(0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

в $\mathbb{R}^2$.

Заметим, что любая линейная оболочка является таким множеством V, состоящим из векторов, что на векторах определена (бинарная) операция сложения и для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ — (унарная) операция умножения на данное число λ, при этом данное множество V с введенными операциями обладает следующими свойствами:

(1) $\forall v, u \in V \ v+u=u+v$ (коммутативность сложения векторов);

(2) $\forall u, v, w \in V \ (u+v)+w=u+(v+w)$ (ассоциативность сложения векторов);

(3) $\exists 0 \in V \ \forall v \in V \ 0+v=v$ (существование нулевого вектора);

(4) $\forall v \in V \ \exists u(=-v) \in V \ u+v=0$ (существование противоположного вектора);

(5) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \forall v \in V \ (\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);

(6) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall u, v \in V \ \lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$ (дистрибутивность относительно сложения векторов);

(7) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \forall v \in V \ (\lambda\mu)v=\lambda(\mu v)$ (ассоциативность умножения векторов и чисел);

(8) $\forall v \in V \ 1 \cdot v=v$ (нормирование).

Множество (состоящее из векторов) с операциями сложения векторов и умножения векторов на числа называется *линейным* (*векторным*) *пространством*, если оно удовлетворяет выписанным восьми акисомам.

Таким образом, любая линейная оболочка системы векторов из $\mathbb{R}^n$ является линейным пространством.

Линейная зависимость.

Система векторов $X_1, \ldots, X_k$ линейного пространства называется *линейно зависимой*, если найдутся k чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, одновременно равных нулю и таких, что

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k = 0.$$

Будем говорить, что такая линейная зависимость *нетривиальна.* Если же

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0,$$

то векторы $X_1, \ldots, X_k$ называются *линейно независимыми.*

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ так называемые *единичные векторы*

$$E_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad E_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad E_n = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Каждый вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ однозначно записывается в виде

$$X = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \cdots + x_n E_n.$$

Поэтому

$$\mathbb{R}^n = \langle E_1, E_2, \ldots, E_n \rangle.$$

Понятно, что единичные векторы $E_1, E_2, \ldots, E_n$ линейно независимы.

Один вектор $X \neq 0$, очевидно, тоже линейно независим.

Понятно также, что свойство линейной зависимости/независимости никак не связано с порядком векторов, так как слагаемые $\alpha_i X_i$ могут переставлены произвольным образом.

Теорема 1. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *система векторов* $\{X_1, \dots, X_k\}$ *с линейно зависимой подсистемой сама линейно зависима;*

(2) *любая часть линейно независимой системы векторов* $\{X_1, \dots, X_k\}$ *линейно независима;*

(3) *среди линейно зависимой системы векторов хотя бы один является линейной комбинацией остальных;*

(4) *если один из векторов системы выражается через остальные, то система линейно зависима;*

(5) *если векторы* $X_1, \dots, X_k$ *линейно независимы, а векторы* $X_1, \dots, X_k, X$ *линейно зависимы, то* X *— линейная комбинация векторов* $X_1, \dots, X_k$*;*

(6) *если векторы* $X_1, \dots, X_k$ *линейно независимы и вектор* X_{k+1} *нельзя через них выразить, то система* $X_1, \dots, X_k, X_{k+1}$ *линейно независима.*

Доказательство. (1) Пусть, например, первые s векторов $X_1, \dots, X_s$, $s < k$, линейно зависимы, т. е.

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_s X_s = 0,$$

где не все α_i равны нулю. Положив тогда $\alpha_{s+1} = \dots = \alpha_k = 0$, получим нетривиальную линейную зависимость

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_s X_s + \alpha_{s+1} X_{s+1} + \dots + \alpha_k X_k = 0.$$

Утверждение (2) непосредственно следует из (1), рассуждением от противного.

(3) Пусть, например, $\alpha_k \neq 0$ в соотношении. Тогда

$$X_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}X_1 - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}X_{k-1}.$$

(4) Пусть, например,

$$X_k = \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_{k-1}X_{k-1}.$$

Положив $\alpha_1 = \beta_1$, …, $\alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$, $\alpha_k = -1$, придем к нужному соотношению с коэффициентом $\alpha_k \neq 0$.

(5) Нетривиальное соотношение

$$\beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k + \beta X = 0$$

с $\beta \neq 0$ дает в силу (3) то, что нужно. Если, однако, $\beta = 0$, то $\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$, поскольку $X_1, \ldots, X_k$ по условию линейно независимы.

Утверждение (6) непосредственно следует из (5). □

БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ

Определение 1. Пусть V — ненулевое линейное пространство в $\mathbb{R}^n$. Система векторов $X_1, \ldots, X_r \in V$ называется *базисом* для V (или в V), если она линейна независима и ее линейная оболочка совпадает с V:

$$\langle X_1, \ldots, X_r \rangle = V.$$

Из определения базиса и линейной оболочки системы векторов следует, что каждый вектор $X \in V$ записывается единственным образом в виде

$$X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_r X_r.$$

Коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ называются координатами вектора X в базисе $X_1, \ldots, X_r$.

Как мы уже видели, линейно независимые единичные векторы порождают $\mathbb{R}^n$. Значит, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ — базис пространства $\mathbb{R}^n$. Но этот так называемый *стандартный* базис — далеко не единственный базис в $\mathbb{R}^n$.

Например, векторы

$$E_1 = E_1, \quad E_2' = E_1 + E_2,$$
$$E_3' = E_1 + E_2 + E_3, \quad \ldots, \quad E_n' = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$

тоже составляют базис пространства $\mathbb{R}^n$.

С другой стороны, пока не ясно, каждое ли линейное пространство в $\mathbb{R}^n$ обладает базисом, а если да, то будет ли количество базисных векторов постоянным.

Ответы на оба вопроса оказываются положительными, рассуждения будут основаны на следующей лемме.

Лемма 1 (основная лемма о линейной зависимости)**.** *Пусть V — линейное пространство в $\mathbb{R}^n$, векторы $X_1, \dots, X_r$ порождают V, а $Y_1, \dots, Y_s$ — линейно независимая система векторов из V. Тогда $s \leqslant r$.*

Доказательство. Как и все векторы из V, векторы $Y_1, \dots, Y_s$ являются линейными комбинациями базисных векторов. Пусть

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \dots + a_{r1}X_r, \\ Y_2 &= a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{r2}X_r, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_s &= a_{1s}X_1 + a_{2s}X_2 + \dots + a_{rs}X_r, \end{aligned}$$

где a_{ij} — какие-то скаляры (являясь координатами векторов Y_j, они однозначно определены, но это пока несущественно для нас).

Рассуждаем от противного. Предположим, что $s > r$. Составим линейную комбинацию векторов Y_j с коэффициентами x_j:

$$\begin{aligned} &x_1Y_1 + \dots + x_sY_s = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s)X_1 + \dots + (a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rs}x_s)X_r \end{aligned}$$

и рассмотрим систему из r линейных уравнений с s неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rs}x_s = 0. \end{cases}$$

Так как по предположению $s > r$, то применимо уже доказанное утверждение, по которому наша система обладает ненулевым решением $(x_1^0, \ldots, x_s^0)$.

Мы приходим к нетривиальной линейной зависимости

$$x_1^0 Y_1 + x_2^0 Y_2 + \cdots + x_s^0 Y_s = 0,$$

наличие которой, однако, противоречит условию леммы.

Значит, $s \leqslant r$. $\square$

Теорема 2. *Каждое ненулевое линейное пространство* $V \subset \mathbb{R}^n$ *обладает конечным базисом. Все базисы пространства* V *состоят из одинакового числа* $r \leqslant n$ *векторов (это число называется размерностью пространства* V *и обозначается* $\dim_{\mathbb{R}} V$ *или просто* $\dim V$*).*

Доказательство. В соответствии с условием V содержит хотя бы один ненулевой вектор X_1. Пусть мы нашли в V линейно независимую систему векторов $X_1, \ldots, X_k$. Если линейная оболочка $\langle X_1, \ldots, X_k \rangle$ не совпадает с V, то выберем в V вектор $X_{k+1} \notin \langle X_1, \ldots, X_k \rangle$. Другими словами, X_{k+1} не является линейной комбинацией векторов $X_1, \ldots, X_k$. По предыдущей теореме, пункту (6), система $X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}$ оказывается линейно независимой.

Мы могли бы продолжать неограниченно процесс расширения линейно независимой системы, но все ее векторы X_i лежат в $\mathbb{R}^n = \langle E_1, E_2, \ldots, E_n \rangle$, а по только что доказанной лемме линейно независимая система в $\mathbb{R}^n$ содержит не более n векторов.

Значит, при некотором натуральном $r \leqslant n$ линейно независимая система

$$X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_r \in V$$

станет *максимальной*, то есть мы получим линейно зависимую систему $X_1, \ldots, X_r, X$, каков бы ни был вектор $X \neq 0$ из V.

По теореме 1, пункт (5), будем иметь включение

$$X \in \langle X_1, \ldots, X_r \rangle.$$

Значит,

$$V = \langle X_1, \ldots, X_r \rangle,$$

и векторы $X_1, \ldots, X_r$ составляют базис для V.

Предположим теперь, что $Y_1, \ldots, Y_s$ — еще один базис для V.

По основной лемме о линейной зависимости мы имеет неравенство $s \leqslant r$. Поменяв местами системы $X_1, \ldots, X_r$ и $Y_1, \ldots, Y_s$, мы получим по той же самой лемме неравенство $s \leqslant r$.

Значит, $s = r$ и теорема доказана. $\square$

Итак, с каждым линейным пространством V в $\mathbb{R}^n$ ассоциируется целое положительное число $r \leqslant n$, которое мы назвали ее размерностью: $r = \dim V$. Этот важный числовой параметр пространства можно характеризовать разными другими способами.

Один из вариантов определения размерности основан на понятии ранга система векторов.

Именно, если $\{X_1, X_2, \ldots\}$ — какая-то, возможно, бесконечная, система векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$, то, как мы знаем, размерность линейной оболочки $\langle X_1, \ldots \rangle$ не превосходит n.

Ее называют *рангом* системы $\{X_1, X_2, \ldots\}$:

$$\operatorname{rank}\{X_1, X_2, \ldots\} = \dim\langle X_1, X_2, \ldots \rangle.$$

В случае $V = \{0\}$ принято считать $\dim V = 0$.

Определение 2. Линейная оболочка $\langle U \cup V \rangle$ называется *суммой* подпространств U и V:

$$U + V = \langle U \cup V \rangle = \langle U \cup V \rangle = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}.$$

Если $U \cap V = 0$, то говорят, что сумма $U + V$ прямая, и пишут $U \oplus V$.

Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и $X = X_1 + X_2 = X_1' + X_2'$ — два выражения вектора $X \in V$ в виде линейной комбинации векторов $X_1, X_1' \in V_1$ и $X_2, X_2' \in V_2$. Тогда имеем

$$X_1 - X_1' = X_2 - X_2' \in V_1 \cap V_2,$$

а так как $V_1 \cap V_2 = 0$, то $X_1 = X_1'$, $X_2 = X_2'$.

Если запись $X = X_1 + X_2$, $X_1 \in V_1$, $X_2 \in V_2$, единственна для каждого вектора $X \in V$, то сумма $V = V_1 + V_2$ прямая.

Сумма V подпространств $V_1, \dots, V_k \in \mathbb{R}^n$ называется *прямой суммой*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k,$$

если каждый вектор $X \in V$ имеет однозначное выражение вида

$$X = X_1 + \cdots + X_k, \quad X_i \in V_i.$$