ЛЕКЦИЯ 8

ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ

ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦ

РАНГ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

КВАДРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ

Пусть $\varphi_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, $\varphi_A : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ — линейные отображения, $\varphi_C = \varphi_A \circ \varphi_B$ — их композиция.

Проверим сначала, что $\varphi = \varphi_A \circ \varphi_B$ — линейное отображение:

$$\begin{aligned} \varphi(X' + X'') = \varphi_A(\varphi_B(X' + X'')) = \varphi_A(\varphi_B(X') + \varphi_B(X'')) = \\ = \varphi_A(\varphi_B(X')) + \varphi_A(\varphi_B(X'')) = \varphi(X') + \varphi(X''); \end{aligned}$$

и

$$\varphi(\lambda X) = \varphi_A(\varphi_B(\lambda X) = \varphi_A(\lambda\varphi_B(X)) = \lambda\varphi_A(\varphi_B(X)) = \lambda\varphi(X).$$

Таким образом, с отображением φ ассоциируется определенная матрица C.

Чтобы найти ее, предположим, что при отображении φ_B столбик $[x_1, \ldots, x_n]$ переходит в столбик $[y_1, \ldots, y_s]$, который, в свою очередь, при отображении φ_A переходит в столбик $[z_1, \ldots, z_m]$.

Запишем это в явном виде как сумму:

$$z_i = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} y_k = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} b_{kj} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj} \right) x_j.$$

С другой стороны,

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Сравнивая полученные выражения, мы приходим к соотношениям

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

Будем говорить, что матрица C получается в результате *умножения* матрицы A на матрицу B. Принято писать

$$C = AB.$$

Таким образом, произведением прямоугольной матрицы (a_{ik}) размера $m \times s$ и прямоугольной матрицы (b_{kj}) размера $s \times n$ называется прямоугольная матрица (c_{ij}) размера $m \times n$ с элементами c_{ij}, задающимися формулой, выписанной выше.

Нами доказана

Теорема 1. *Произведение $\varphi_A \varphi_B$ двух линейных отображений с матрицами A и B является линейным отображением с матрицей $C = AB$,*

$$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}.$$

Мы можем забыть о линейных отображениях и находить произведение AB двух произвольных матриц A, B, имея при этом в виду, что такое произведение имеет смысл только в том случае, когда число столбцов в матрице A совпадает с числом строк в матрице B.

Именно при этом условии работает правило умножения i-й строки $A_{(i)}$ на j-й столбец $B^{(j)}$, согласно которому

$$c_{ij} = (a_{i1}, \ldots, a_{is})[b_{1j}, \ldots, b_{sj}] = A_{(i)} B^{(j)}.$$

Число строк матрицы AB равно числу строк матрицы A, а число столбцов — числу столбцов матрицы B.

В частности, произведение квадратных матриц одинаковых порядков всегда определено, но даже в этом случае, вообще говоря, $AB \neq BA$, как показывает простой пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следствие 1. *Умножение матриц ассоциативно:*

$$A(BC) = (AB)C.$$

Доказательство. Действительно, произведение матриц соответствует композиции линейных отображений, а композиция всегда ассоциативна. $\square$

Обратим внимание еще и на так называемые законы дистрибутивности

$$(A+B)C = AC + BC, \quad D(A+B) = DA + DB,$$

где A, B, C, D — произвольные матрицы размеров, соответственно, $m \times s$, $m \times s$, $s \times n$, $n \times m$.

Действительно, полагая

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}),$$

мы получим для любых i, j равенство

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj},$$

левая часть которого дает i, j-й элемент матрицы $(A+B)C$, а правая часть — i, j-й элемент матрицы $AC + BC$.

Второй закон дистрибутивности проверяется совершенно аналогично.

ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦ

Будем говорить, что матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

размеров $m \times n$ и $n \times m$ соответственно получаются друг из друга *транспонированием* — заменой строк на столбцы, а столбцов на строки.

Непосредственно видно, что

$$(A^T)^T = A, \quad (A+B)^T = A^T + B^T, \quad (\lambda A^T) = \lambda A^T.$$

Транспонирование произведения матриц подчиняется более интересной закономерности.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ms} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sn} \end{pmatrix},$$

и

$$A^T = (a'_{ki}), \quad B^T = (b'_{jk}),$$

где

$$a'_{ki} = a_{ik}, \quad b'_{jk} = b_{kj}.$$

Вычислим

$$C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

и

$$D = B^T A^T = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nm} \end{pmatrix}$$

с помощью полученных нами формул:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad d_{ji} = \sum_{k=1}^{n} b'_{jk} a'_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Отсюда видно, что $d_{ji} = c_{ij}$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$. Значит, $C^T = D$, или, как было исходно,

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Понятно, что если имелось несколько матриц $A_1, A_2, \dots, A_k$, для которых было определено последовательное произведение, то

$$(A_1 A_2 \dots A_k)^T = A_k^T \dots A_2^T A_1^T.$$

Благодаря тому, что ранги матриц по строкам и столбцам совпадают и равны рангу матрицы,

$$\operatorname{rank} A^T = \operatorname{rank} A.$$

РАНГ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

Пусть A и B — произвольные матрицы размеров $m \times s$ и $s \times n$. Что можно сказать о величине ранга $\operatorname{rank} AB$?

Теорема 2. *Справедливо неравенство*

$$\operatorname{rank} AB \leqslant \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}.$$

Доказательство. Для строк $C_{(i)}$ и столбцов $C^{(i)}$ матрицы $C = AB$ мы имеем выражения

$$C_{(i)} = A_{(i)}B, \quad C^{(j)} = AB^{(j)}.$$

Интерпретируя теперь ранг матрицы A как

$$r_1 = \operatorname{rank} A = \dim\langle A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(m)}\rangle,$$

считаем без ограничения общности базисными строки $A_{(1)}, \ldots, A_{(r_1)}$, поскольку необходимая перестановка строк в A будет сопровождаться точно такой же перестановкой строк матрицы C, а это преобразование никак не меняет ни один из рангов.

Итак,

$$A_{(k)} = \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_{ki} A_{(i)}, \quad r_1 < k \leqslant m,$$

откуда (используя дистрибутивность)

$$C_{(k)} = A_{(k)}B = \left(\sum_{i=1}^{r_1} \lambda_{ki} A_{(i)}\right) B = \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_{ki}(A_{(i)}B) = \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_{ki} C_{(i)}.$$

Таким образом,

$$\langle C_{(1)}, \ldots, C_{(m)} \rangle = \langle C_{(1)}, \ldots, C_{(r_1)} \rangle.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rank} C = \dim \langle C_{(1)}, \ldots, C_{(m)} \rangle \leqslant r_1 = \operatorname{rank} A.$$

Аналогично, интерпретируя ранг матрицы B как

$$r_2 = \operatorname{rank} B = \dim \langle B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(n)} \rangle$$

и считая без ограничения общности базисными столбцы $B^{(1)}, \ldots, B^{(r_2)}$, будем иметь

$$B^{(k)} = \sum_{j=1}^{r_2} \mu_{kj} B^{(j)},$$

$$C^{(k)} = AB^{(k)} = A \left(\sum_{j=1}^{r_2} \mu_{kj} B^{(j)} \right) \sum_{j=1}^{r_2} \mu_{kj} AB^{(j)} = \sum_{j=1}^{r_2} \mu_{kj} C^{(j)},$$
$$r_2 < k \leqslant n,$$

откуда

$$\operatorname{rank} C = \dim \langle C^{(1)}, \ldots, C^{(n)} \rangle \leqslant r_2 = \operatorname{rank} B.$$

$\square$

КВАДРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

Множество всех квадратных матриц (a_{ij}) порядка n с вещественными коэффициентами a_{ij} обычно обозначается через $M_n(\mathbb{R})$ или просто M_n.

Как мы уже упоминали, можно говорить о векторном пространстве $M_n(\mathbb{R})$.

Плюс к этому на таких матрицах определена операция умножения, подчиненная законам ассоциативности и дистрибутивности относительно сложения.

Определение 1. Говорят, что квадратные матрицы фикисированного порядка n образуют *матричное (ассоциативное) кольцо.* С учетом легко проверяемый правил $\lambda AB = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ умножения на скаляры $\lambda \in \mathbb{R}$ множество $M_n(\mathbb{R})$ называют также *алгеброй матриц* над $\mathbb{R}$.

Обратим внимание на единичную матрицу $E = (\delta_{kj})$, где

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

— *символ Кронекера.*

Очевидно, что $\operatorname{rank} E = n$.

Правило умножения матриц показывает, что справедливы соотношения

$$EA = AE = A \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Более общо,

$$(\lambda E)A = A(\lambda E) = \lambda A,$$

где

$$\lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

— скалярная матрица.

Таким образом, умножение матрицы A на скаляр равносильно умножению на скалярную матрицу.

Мы увидели, что скалярная матрица перестановочна с любой другой квадратной матрицей.

Теорема 3. *Матрица из M_n, перестановочная со всеми матрицами в M_n, должна быть скалярной.*

Доказательство. Введем матрицу E_{ij}, у которой на месте (i, j) стоит единица, а во всех остальных — нули. Если $Z = (z_{ij})$ — матрица, о которой идет речь в теореме, то она перестановочна, в частности, со всеми E_{ij}:

$$ZE_{ij} = E_{ij}Z, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Перемножая матрицы в левой и правой частях этого равенства, м получим матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & z_{1i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & z_{2i} & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & z_{ni} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ z_{j1} & z_{j2} & \dots & z_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

с единственным ненулевым j-м столбцом и соответственно с единственной ненулевой i-й строкой.

Их сравнение немедленно приводит к соотношениям $z_{ki} = 0$ при $k \neq i$ и $z_{ii} = z_{jj}$.

Меняя i и j, получаем требуемое. $\square$