ЛЕКЦИЯ 9

ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ

ОБЪЕМ n-МЕРНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ

Система уравнений с матрицей A размера $m \times n$ и столбцов свободных членов $B \in \mathbb{R}^m$ может быть записана коротко в виде

$$AX = B,$$

где $X = [x_1, \ldots, x_n]$ — столбец высоты n.

Представив, что $m = n$ и квадратная матрица A является невырожденной, мы получим, и притом единственное, решение этой системы, умножая обе части матричного соотношения слева на A^{-1}:

$$X = EX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Эта удобная символическая запись решений определенной системы не избавляет нас от вычислений, так как матрица A^{-1} заранее не дана.

Теперь воспользуемся такой же системой записи для понимания, какие бывают решения у однородной линейной системы

$$AX = 0.$$

Мы уже знаем, что если $X^{(1)}, X^{(2)}$ — решения нашей однородной системы (ЛОС), то любая из линейная комбинация тоже будет решением:

$$A(\alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)}) = \alpha_1 AX^{(1)} + \alpha_2 AX^{(2)} = 0.$$

Поэтому можно говорить о *пространстве решений* ЛОС — линейной оболочке

$$V_A = \langle X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0 \rangle \subset \mathbb{R}^n.$$

Пусть $s = \dim V_A$, $r = \operatorname{rank} A$. По определению $s \leqslant n$, $r \leqslant \min(m, n)$.

Какая связь существует между s и r?

Теорема 1. *Имеет место равенство $r + s = n$.*

Доказательство. Выберем базис $X^{(1)}, \ldots, X^{(s)}$ линейной оболочки V_A и дополним его до базиса $X^{(1)}, \ldots, X^{(s)}, X^{(s+1)}, \ldots, X^{(n)}$ всего пространства $\mathbb{R}^n$.

Это всегда можно сделать, так как если множество векторов было линейно независимо, но не являлось базисом, то можно было выбрать новый вектор, который не выражался через векторы этого множество, и добавить к нашему множеству, после чего новое множество векторов все равно осталось бы линейно независимым. Мы знаем, что множество линейно независимых векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ не может содержать более n векторов, то есть процедура добавления оказывается конечной.

Теперь для любого вектора

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X^{(i)} \in \mathbb{R}^n$$

имеем

$$AX = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i AX^{(i)} = \alpha_{s+1} AX^{(s+1)} + \cdots + \alpha_n X^{(n)}.$$

Таким образом, линейная оболочка

$$V(A) = \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle = \langle x_1 A^{(1)} + \cdots + x_n A^{(n)} \mid x_i \in \mathbb{R}^n \rangle = \\ = \langle AX \mid X \in \mathbb{R}^n \rangle \subset \mathbb{R}^m,$$

называемая *пространством столбцов* матрицы A, совпадает с линейной оболочкой

$$\langle AX^{(s+1)}, \ldots, AX^{(n)} \rangle.$$

В частности,

$$r = \dim V(A) \leqslant n - s.$$

но векторы $AX^{(s+1)}, \ldots, AX^{(n)}$ линейно независимы, так как из

$$0 = \sum_{k \geqslant s+1} \beta_k AX^{(k)} = A \left(\sum_{k \geqslant s+1} \beta_k X^{(k)} \right)$$

следует

$$\sum_{k \geqslant s+1} \beta_k X^{(k)} \in V_A,$$

а это в силу выбора $X^{(s+1)}), \ldots, X^{(n)}$ возможно только при $\beta_{s+1} = \cdots = \beta_n$. Значит, $r = n - s$. $\square$

Чтобы найти базис пространства V_A, выберем в A r базисных столбцов одинм из способов — приведением A к ступенчатому виду или как-либо еще.

Перестановкой столбцов или, что равносильно, перенумерацией неизвестных, можно добиться, чтобы базисными были первые r столбцов $A^{(1)}, \dots, A^{(r)}$.

при этом в новой системе неизвестных $x'_1, \dots, x'_n$ главными неизвестными станут $x'_1, \dots, x'_r$.

Любая система из $r+1$ столбцов $A^{(1)}, \dots, A^{(r)}, A^{(r+k)}$, $k > 0$, будет линейно зависимой, поэтому можно выписать систему соотношений

$$X_1^{(k)} A^{(1)} + x_2^{(k)} A^{(2)} + \dots + x_r^{(k)} A^{(r)} + A^{(r+k)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-r.$$

Векторы-столбцы

$$\begin{pmatrix} X^{(1)} & = & [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_r^{(1)}, 1, 0, \dots, 0], \\ X^{(2)} & = & [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_r^{(2)}, 0, 1, \dots, 0], \\ \dots & \dots & \dots \\ X^{(n-r)} & = & [x_1^{(n-r)}, x_2^{(n-r)}, \dots, x_r^{(n-r)}, 0, 0, \dots, 1] \end{pmatrix}$$

в количестве $n-r$ штук, очевидно, линейно независимы (из-за специального вида своих последних $n-r$ компонент) и, будучи решениями ЛОС, составляют базис пространства V_A всех ее решений.

Понятно, что решение $X^{(k)}$ получается, если новым (штрихованным) свободным неизвестным придать значения

$$x'_{r+1} = 0, \ldots, x_{r+k} = 1, \ldots, x'_n = 0.$$

Любой базис пространства решений однородной системы $AX = 0$ ранга r называется *фундаментальной системой решений.*

Выписанную систему называют еще *нормальной* фундаментальной системой.

Как мы уже поняли, ее ранг

$$s = \dim V_A = n - r$$

равен числу свободных неизвестных линейной системы.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Объем параллелепипеда.

Ничто не мешает сейчас ввести общее понятие определителя, обобщающее определители для матриц размера 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

и матриц размера 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Однако мы попытаемся на время забыть о нашей задаче и обратимся к вычислению объемов простейших геометрических фигур — параллелепипедов.

Квадратной матрице (a_{ij}) порядка n поставим в соответствие *параллелепипед*

$$\Pi(A) = \Pi(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}),$$

ребра которого задаются столбцами матрицы $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$, т. е. векторами (или точками)

$$A^{(j)} = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}] \in \mathbb{R}^n.$$

Под $\Pi(A)$ нужно понимать подмножество в $\mathbb{R}^n$, состоящее из всех точек вида

$$x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)}, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1.$$

При $n = 1$ параллелепипед — это привычный нам отрезок, при $n = 2$ — параллелограмм, при $n = 3$ — обычный трехмерный параллелепипед.

Объем $v(\Pi(A))$ n-мерного параллелепипеда определяется по индукции как произведение объема

$$v(\Pi(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n-1)}))$$

$(n-1)$-мерного основания в $\mathbb{R}^{n-1}$ и длины h перпендикуляра $A^{(n)}P$, опущенного на гиперплоскость этого основания из точки $A^{(n)}$.

Под объемом отрезка понимается его длина, под объемом параллелограмма — его площадь. Не будем сейчас уходить в точные определения и подробности, так как это не относится напрямую к теме.

Пусть в двумерном случае есть параллелограмм, задаваемый матрицей

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тогда его площадь равна удвоенной площади треугольника, вершинами которого являются точки $(0,0)$, (a,b) и (c,d).

Мы знаем, что площадь треугольника равна половине произведения длин двух соседних его сторон на синус угла между ними, то есть площадь параллелограмма —

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\varphi.$$

При этом угол φ равен разности углов, которые образуют с осью Ox векторы (a,b) и (c,d), косинусы и синусы этих углов равны

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}},\ \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}.$$

При этом известно, что

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha.$$

Подставим все это в формулу:

$$\begin{gathered}\Pi(A)=\\ =\left|\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}\right)\right|=\\ =|ad-bc|.\end{gathered}$$

Получился модуль двумерного определителя.

Трехмерную ситуацию не будем разбирать подробно, так как это очень длинно и вычислительно, но тоже получится, что объем параллелепипеда равен модулю определителя.

Соблазнительно было бы сохранить формулы вычисления объема через определитель без оговорок на знак, то есть при любом расположении точек $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$, но это возможно только в том случае, если пользоваться понятием *ориентированного объема* параллелепипеда с допустимыми отрицательными значениями.

В частности, для отрезка с отрицательным концом $a < 0$ ориентированной длиной будет как раз число a.

Для параллелограмма $\Pi(A^{(1)}, A^{(2)})$ площадь берется со знаком плюс, если упорядоченная пара векторов $A^{(1)}, A^{(2)}$ задает ту же ориентацию плоскости, что и базисная пара векторов $(e_1, e_2) = ([1, 0], [0, 1])$, в противном случае — со знаком минус.

При таком подходе стоит продолжить логику и называть ориентированным объемом параллелепипеда, натянутого на векторы $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$, его объем со знаком, где знак выбирается в зависимости от того, будет ли набор вектор задавать ту же ориентацию пространства, что и обычный упорядоченный базис.

Обратим внимание на проверяемые свойства ориентированного объема параллелепипеда:

(1) $v(\Pi(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(i)}, A^{(i+1)}, \ldots, A^{(n)}) = -v(\Pi(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(i+1)}, A^{(i)}, \ldots, A^{(n)})$;

(2) $v(\Pi(A^{(1)}, \ldots, \lambda A^{(i)} + \mu B^{(i)}, \ldots, A^{(n)}) = \lambda v(\Pi(A^{(1)}, \ldots, A^{(i)}, \ldots, A^{(n)}) + \mu v(\Pi(A^{(1)}, \ldots, B^{(i)}, \ldots, A^{(n)})$;

(3) $v(\Pi([1, 0, 0, \ldots, 0], [0, 1, 0, \ldots, 0], \ldots, [0, 0, 0, \ldots, 0, 1])) = 1.$

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— это число (или выражение), которое определяется по формуле

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \dots a_{n,\sigma_n}.$$

Другими словами, *определителем* $\det A$ матрицы (a_{ij}) называется алгебраическая сумма всевозможных произведений коэффициентов a_{ij}, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. В каждом произведении сомножители записываются в порядке следования строк, а номера столбцов определяются образами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ номеров строк при перестановке $\sigma \in S_n$. Всего под знаком суммы стоит $n!$ слагаемых; слагаемый, отвечающие четным перестановкам, входят со знаком плюс, а отвечающие нечетным перестановкам — со знаком минус.

Получим связь определителя матрицы и транспонированной матрицы:

Теорема 2. *Определители любой квадратной матрицы A и транспонированной матрицы A^T совпадают:*

$$\det A^T = \det A.$$

Доказательство. Положив $A = (a_{ij})$ и $A^T = (a'_{ij})$, где $a'_{ij} = a_{ij}$, и заметив, что $k = \pi(\pi^{-1}k)$ для любой перестановки $\pi \in S_n$ и для любого номера $k = 1, 2, \ldots, n$, мы видим, что упорядочение множителей произведения

$$a'_{1,\pi_1} \ldots a'_{n,\pi_n}$$

в соответствии с перестановкой π^{-1} дает

$$a'_{1,\pi_1} \ldots a'_{n,\pi_n} = a'_{\pi^{-1}(1),\pi(\pi^{-1}(1))} \ldots a'_{\pi^{-1}(n),\pi(\pi^{-1}(n))} = \\ = a'_{\pi^{-1}(1),1} \ldots a'_{\pi^{-1}(n),n} = a_{1,\pi^{-1}(1)} \ldots a_{n,\pi^{-1}(n)}.$$

Учтем еще, что знаки взаимно обратных перестановок совпадают.

Значит, в формуле определителя имеем

$$\det A^T = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, a'_{1,\pi_1} \ldots a'_{n,\pi_n} = \\ = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi^{-1} a'_{1,\pi^{-1}(1)} \ldots a'_{n,\pi^{-1}(n)} = \\ = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1,\sigma_1} \ldots a_{n,\sigma_n} = \det A.$$

□

Замечание 1. Утверждение предыдущей теоремы интерпретируется так: если для определителей выполнено какой-то свойство относительно строк (столбцов), то оно имеет место относительно столбцов (строк).