ЛЕКЦИЯ 9

ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАТРИЦ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ

ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

Для данной матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ можно попробовать найти такую матрицу $A' \in M_n(\mathbb{R})$, чтобы выполнялись соотношения

$$AA' = E = A'A.$$

Сразу же заметим, что

$$AA' = E = A''A \Longrightarrow A'' = A'.$$

Действительно,

$$A'' = A''E = A'(AA') = (A''A)A' = EA' = A'.$$

Таким образом, матрица A', если она существует, единственна. Ее называют матрицей, *обратной* к A, и обозначают через A^{-1}.

Если обратная матрица существует, то говорят, что A *обратима*.

Определение 1. Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ называется *невырожденной*, если система ее строк (а тем самым и столбцов) линейно независима, т. е. $\operatorname{rank} A = n$. Если $\operatorname{rank} A < n$, то матрица A называется *вырожденной.*

Теорема 1. *Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ обратима тогда и только тогда, когда она невырожденна.*

Доказательство. (1) Если $AB = E$ (или $BA = E$), то по теореме о ранге произведения имеем

$$n = \operatorname{rank} E = \operatorname{rank} AB \leqslant \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\} \leqslant n,$$

откуда $\operatorname{rank} A = n$.

(2) Если $\operatorname{rank} A = n$, то

$$\langle E^{(1)}, \ldots, E^{(n)} \rangle = \mathbb{R}^n = \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle,$$

откуда следует, что

$$E^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} A^{(i)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

причем коэффициенты a'_{ij}, составляющие матрицу

$$A' = (a'_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}),$$

определены однозначно.

По правилу умножения матриц эти соотношения переписываются как

$$E^{(j)} = AA'^{(j)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

откуда

$$E = (E^{(1)}, \ldots, E^{(n)}) = (AA'^{(1)}, \ldots, AA'^{(n)}) = AA'.$$

Здесь мы интерпретировали матрицы E и AA' как объединения отвечающих им столбцов.

Заметим теперь, что вместе с A невырожденной является и транспонированная матрица A^T. Поэтому в силу доказанного найдется матрица B такая, что $A^T \cdot B = E$. Полагая $A'' = B^T$, найдем

$$E = E^T = (A^T B)^T = B^T (A^T)^T = A'' A.$$

Итак,

$$AA' = E = A'' A,$$

откуда получается, что $A'' = A' = A^{-1}$. $\square$

Следствие 1. *Если B и C — невырожденные квадратные матрицы порядков m и n соответственно, A — произвольная $m\times n$-матрица, то*

$$\operatorname{rank} BAC = \operatorname{rank} A.$$

Доказательство. В силу предыдущих теорем

$$\operatorname{rank} BAC \leqslant \operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} BA(CC^{-1}) = \\ = \operatorname{rank} (BAC)C^{-1} \leqslant \operatorname{rank} BAC,$$

откуда

$$\operatorname{rank} BAC = \operatorname{rank} BA.$$

Аналогично устанавливается равенство

$$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A.$$

□

Следствие 2. *Если $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ и $AB = E$ или $BA = E$, то $B = A^{-1}$.*

Доказательство. Мы уже показывали в теореме, что если $AB = E$, то $\operatorname{rank} A = n$, то есть A невырожденна и, следовательно, обратима. □

Следствие 3. *Если* $A, B, \dots, C, D$ *— невырожденные* $n \times n$*-матрицы, то произведение*

$$AB \dots CD$$

также невырожденно и

$$(AB \dots CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1} \dots B^{-1}A^{-1}.$$

Доказательство. Невырожденность произведения

$$G = AB \dots CD$$

видна из следствия 2, а равенство

$$G^{-1} = D^{-1}C^{-1} \dots B^{-1}A^{-1}$$

проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned} G(D^{-1}C^{-1} \dots B^{-1}A^{-1}) &= AB \dots C(DD^{-1})C^{-1} \dots B^{-1}A^{-1} = \\ &= AB \dots (CC^{-1}) \dots B^{-1}A^{-1} = \dots = E. \end{aligned}$$

□

КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ МАТРИЦ

Как и в предыдущей лекции, обозначим через E_{st} матрицу размера $m \times m$, в которой на месте (s,t) стоит единица, а все остальные — нули (такие матрицы называют *матричными единицами*).

Рассмотрим в $M_n(\mathbb{R})$ так называемые *элементарные матрицы* следующих типов:

$$F_{s,t} = E - E_{ss} - E_{tt} + E_{st} + E_{ts} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 0 &&& 1 && \\ &&& \ddots &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&& \ddots && \\ && 1 &&& 0 && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& 1 \end{pmatrix}, \quad s \neq t;$$

$$F_{s,t}(\lambda) = E + \lambda E_{s,t} = \begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ \ldots\ldots & 1 & \ldots & \lambda & \ldots \\ && \ddots &&& \\ &&&& 1 \end{pmatrix}, \quad s \neq t;$$

$$F_s(\lambda) = E + (\lambda - 1)E_{ss} = \operatorname{diag}[1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1], \quad \lambda \neq 0.$$

Пусть A — произвольная $m \times n$-матрица.

Если мы умножим ее слева на $F_{s,t}$, то у нее поменяются местами строчки с номерами s и t, то есть есть к ней применится элементарное преобразование над строками типа (I). Если же мы умножим ее справа на $F_{s,t}$, то у матрицы A поменяются местами столбцы с номерами s и t.

Умножив матрицу A слева на матрицу $F_{s,t}(\lambda)$, мы применим к ее строкам элементарное преобразование типа (II), то есть прибавим к одной строке другую, умноженную на λ.

Точно так же мы получим элементарное преобразование над столбцами, если умножим A на $F_{s,t}(\lambda)$ справа.

Наконец, посмотрим, что произойдет, если мы умножим матрицу A слева на матрицу $F_s(\lambda)$. Каждая срока умножится на соответствующий диагональный элемент, то есть все строки, кроме s-й, не изменятся, а s-ая строчка умножится на λ. Такой преобразование, когда некоторая строка матрицы умножается на ненулевое число, назовем *элементарным преобразованием типа* (III).

При умножении матрицы A справа на $F_s(\lambda)$ мы получим умножение s-го столбца на λ.

Очевидно, что элементарные преобразования третьего типа тоже обратимы.

Заметим, что элементарными преобразованиями над строками мы можем привести матрицу к ступенчатому виду, где в углах будут стоять единицы.

После этого элементарными преобразованиями второго типа над столбцами можно избавиться от ненулевых чисел, кроме этих угловых единиц, а потом, после того, как поменяем столбики местами, у нас останется матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для любой матрицы A существует набор элементарных матриц $P_1, \dots, P_k$, $Q_1, \dots, Q_l$ таких, что

$$P_k P_{k-1} \dots P_1 A Q_1 Q_2 \dots Q_l = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы P_i имеют размер $m \times m$, матрицы Q_j — $n \times n$.

Обратные матрицы для элементарных матриц:

1) $(F_{s,t})^{-1} = F_{s,t}$;

2) $F_{s,t}(\lambda)^{-1} = F_{s,t}(-\lambda)$;

3) $F_s(\lambda) = F_s(\lambda^{-1})$.

Отсюда получается, что матрицы $P = P_k P_{k-1} \ldots P_1$ и $Q = Q_! Q_2 \ldots Q_l$ тоже обратимы:

$$P^{-1} = P_1^{-1} \ldots P_{k-1}^{-1} P_k^{-1}, \quad Q^{-1} = Q_l^{-1} \ldots Q_2^{-1} Q_1^{-1}.$$

Две матрицы A, B размера $m \times n$ назовем *эквивалентными* и запишем $A \sim B$, если найдутся такие невырожденные матрицы P, Q порядков m и n соответственно, что $B = PAQ$.

Как легко понять, $\sim$ является отношением эквивалентности:

(1) $A \sim A$ ($P = E_m$, $Q = E_n$);

(2) $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$, так как $B = PAQ \Longrightarrow A = P^{-1} B Q^{-1}$;

(3) $B = P'AQ'$, $C = P''BQ'' \Longrightarrow C = (P''P')A(Q'Q'')$.

Согласно общему принципу, связанному с отношениями эквивалентности, множество всех $m \times n$-матриц разбивается отношением $\sim$ на непересекающиеся классы эквивалентных матриц.

Так как ранги эквивалентных матриц равны, то в качестве представителей можно брать матрицы вида

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили следующее утверждение:

Теорема 2. *Множество матриц размера $m \times n$ разбивается на*

$$p = \min(m, n) + 1$$

классов эквивалентности.

Все матрицы ранга r попадают в один класс с представителем

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следствие 4. *Всякая невырожденная $n \times n$-матрица записывается в виде произведения элементарных матриц.*

Доказательство. Действительно, все невырожденные матрицы порядка n попадают в один класс с представителем — единичной матрицей, поскольку их ранги равны n.

Соответствующее соотношение

$$P_k P_{k-1} \dots P_1 A Q_1 Q_2 \dots Q_l = E,$$

переписанное в виде

$$A = P_1^{-1} \dots P_{k-1}^{-1} P_k^{-1} Q_l^{-1} \dots Q_2^{-1} Q_1^{-1},$$

дает нужное утверждение. $\square$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Заметим, что в условиях предыдущего пункта матрица A^{-1} ищется довольно просто:

$$A^{-1} = Q_1Q_2 \ldots Q_lP_kP_{k-1} \ldots P_1 = QP.$$

Заметим теперь, что если бы мы стартовали в предыдущем пункты с невырожденной матрицы, то могли бы дойти до единичной матрицы только лишь преобразованиями над строками.

Действительно, начнем приводить матрицу к ступенчатому виду преобразованиями над строками.

Очевидно, что ступенчатый вид должен оказаться верхнетреугольным с ненулевыми числами на диагонали, так как если возникнет хотя бы одна ступенька ширины > 1, то в конце обязательно появится нулевая строка.

Придя к верхнетреугольному виду, преобразованиями третьего типа мы получим на диагонали единицы, после чего вычтем последнюю строчку с подходящими коэффициентами из всех остальных строк, обнулив последние элементы во всех строках, кроме последней. Далее вычтем предпоследнюю строчку из всех предыдущих строк с подходящими коэффициентами, откуда получим во всех строках, кроме предпоследней, нули на предпоследнем месте.

Продложая эту процедуру, дойдем до единичной матрицы.

Теперь перейдем к нахождению обратной матрицы.

Сразу рассмотрим не матрицу A, а расширенную матрицу $(A \mid E)$ размера $n \times 2n$ и будем элементарными преобразованиями над строками (то есть умножением слева на элементарные матрицы) приводить ее к единичной.

Возникнет цепочка

$$(A|E) \mapsto (P_1A|P_1E) \mapsto \dots \\ \mapsto (P_k \dots P_2P_1A|P_k \dots P_2P_1E) = (E|A').$$

Она оборвется на k-м шаге, когда в левой половине расширенной матрицы окажется единичная матрица. Это будет означать $(P_k \dots P_2P_1)A = E = PA$, то есть $P = A^{-1}$.

В правой половине расширенной матрицы как раз будет стоять матрица A^{-1}.

Таким образом, мы сформулировали алгоритм нахождения обратной матрицы.

Пример 1. Пусть
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеем
$$(A|E) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ

Система уравнений с матрицей A размера $m \times n$ и столбцов свободных членов $B \in \mathbb{R}^m$ может быть записана коротко в виде

$$AX = B,$$

где $X = [x_1, \ldots, x_n]$ — столбец высоты n.

Представив, что $m = n$ и квадратная матрица A является невырожденной, мы получим, и притом единственное, решение этой системы, умножая обе части матричного соотношения слева на A^{-1}:

$$X = EX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Эта удобная символическая запись решений определенной системы не избавляет нас от вычислений, так как матрица A^{-1} заранее не дана.

Теперь воспользуемся такой же системой записи для понимания, какие бывают решения у однородной линейной системы

$$AX = 0.$$

Мы уже знаем, что если $X^{(1)}, X^{(2)}$ — решения нашей однородной системы (ЛОС), то любая из линейная комбинация тоже будет решением:

$$A(\alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)}) = \alpha_1 AX^{(1)} + \alpha_2 AX^{(2)} = 0.$$

Поэтому можно говорить о *пространстве решений* ЛОС — линейной оболочке

$$V_A = \langle X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0 \rangle \subset \mathbb{R}^n.$$

Пусть $s = \dim V_A$, $r = \operatorname{rank} A$. По определению $s \leqslant n$, $r \leqslant \min(m, n)$.

Какая связь существует между s и r?

Теорема 3. *Имеет место равенство* $r + s = n$.

Доказательство. Выберем базис $X^{(1)}, \ldots, X^{(s)}$ линейной оболочки V_A и дополним его до базиса $X^{(1)}, \ldots, X^{(s)}, X^{(s+1)}, \ldots, X^{(n)}$ всего пространства $\mathbb{R}^n$.

Это всегда можно сделать, так как если множество векторов было линейно независимо, но не являлось базисом, то можно было выбрать новый вектор, который не выражался через векторы этого множество, и добавить к нашему множеству, после чего новое множество векторов все равно осталось бы линейно независимым. Мы знаем, что множество линейно независимых векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ не может содержать более n векторов, то есть процедура добавления оказывается конечной.

Теперь для любого вектора

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X^{(i)} \in \mathbb{R}^n$$

имеем

$$AX = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i AX^{(i)} = \alpha_{s+1} AX^{(s+1)} + \cdots + \alpha_n X^{(n)}.$$

Таким образом, линейная оболочка

$$V(A) = \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle = \langle x_1 A^{(1)} + \cdots + x_n A^{(n)} \mid x_i \in \mathbb{R}^n \rangle = \\ = \langle AX \mid X \in \mathbb{R}^n \rangle \subset \mathbb{R}^m,$$

называемая *пространством столбцов* матрицы A, совпадает с линейной оболочкой

$$\langle AX^{(s+1)}, \ldots, AX^{(n)} \rangle.$$

В частности,

$$r = \dim V(A) \leqslant n - s.$$

но векторы $AX^{(s+1)}, \ldots, AX^{(n)}$ линейно независимы, так как из

$$0 = \sum_{k \geqslant s+1} \beta_k AX^{(k)} = A \left(\sum_{k \geqslant s+1} \beta_k X^{(k)} \right)$$

следует

$$\sum_{k \geqslant s+1} \beta_k X^{(k)} \in V_A,$$

а это в силу выбора $X^{(s+1)}), \ldots, X^{(n)}$ возможно только при $\beta_{s+1} = \cdots = \beta_n$. Значит, $r = n - s$. □

Чтобы найти базис пространства V_A, выберем в A r базисных столбцов одинм из способов — приведением A к ступенчатому виду или как-либо еще.

Перестановкой столбцов или, что равносильно, перенумерацией неизвестных, можно добиться, чтобы базисными были первые r столбцов $A^{(1)}, \ldots, A^{(r)}$.

при этом в новой системе неизвестных $x'_1, \ldots, x'_n$ главными неизвестными станут $x'_1, \ldots, x'_r$.

Любая система из $r+1$ столбцов $A^{(1)}, \ldots, A^{(r)}, A^{(r+k)}$, $k > 0$, будет линейно зависимой, поэтому можно выписать систему соотношений

$$X_1^{(k)} A^{(1)} + x_2^{(k)} A^{(2)} + \cdots + x_r^{(k)} A^{(r)} + A^{(r+k)} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-r.$$

Векторы-столбцы

$$\left(\begin{array}{ccc} X^{(1)} & = & [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}, 1, 0, \ldots, 0], \\ X^{(2)} & = & [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_r^{(2)}, 0, 1, \ldots, 0], \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ X^{(n-r)} & = & [x_1^{(n-r)}, x_2^{(n-r)}, \ldots, x_r^{(n-r)}, 0, 0, \ldots, 1] \end{array} \right)$$

в количестве $n-r$ штук, очевидно, линейно независимы (из-за специального вида своих последних $n-r$ компонент) и, будучи решениями ЛОС, составляют базис пространства V_A всех ее решений.

Понятно, что решение $X^{(k)}$ получается, если новым (штрихованным) свободным неизвестным придать значения

$$x'_{r+1} = 0, \ldots, x_{r+k} = 1, \ldots, x'_n = 0.$$

Любой базис пространства решений однородной системы $AX = 0$ ранга r называется *фундаментальной системой решений.*

Выписанную систему называют еще *нормальной* фундаментальной системой.

Как мы уже поняли, ее ранг

$$s = \dim V_A = n - r$$

равен числу свободных неизвестных линейной системы.