

# Лекции 1-12 по Линейной алгебре и геометрии.

Лектор: О.В. Куликова (1 курс, 2 поток, 2020 год)

## 1. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

### 1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для полноты изложения начнем с напоминания определений и утверждений из 1-го семестра (см. [1] гл. 1-3).

**Определение 1.1.** Множество  $V$  называется **векторным (или линейным) пространством над полем  $F$** , если

а) каждому двум элементам  $x, y \in V$  поставлен в соответствие элемент  $z \in V$ , называемый суммой элементов  $x$  и  $y$ ; сумма элементов  $x$  и  $y$  обозначается через  $x + y$ ,

б) каждому элементу  $x \in V$  и каждому элементу  $\lambda \in F$  поставлен в соответствие элемент  $\lambda x \in V$ , называемый произведением элемента  $\lambda$  на элемент  $x$ ,

в) эти операции (линейные операции) удовлетворяют следующим требованиям (аксиомам):

1)  $x + y = y + x$  для любого  $x, y \in V$  (коммутативность);

2)  $x + (y + z) = (x + y) + z$  для любых  $x, y, z \in V$  (ассоциативность);

3) в  $V$  существует такой элемент  $0$  (нуль), что  $x + 0 = x$  для любого  $x \in V$ ;

4) для любого элемента  $x \in V$  существует такой элемент  $-x \in V$  (противоположный элемент), что  $x + (-x) = 0$ ;

5)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$  для любых  $\lambda \in F, x, y \in V$ ;

6)  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$  для любых  $\lambda, \mu \in F, x \in V$ ;

7)  $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$  для любых  $\lambda, \mu \in F, x \in V$ ;

8)  $1x = x$  для любого  $x \in V$ .

Отметим, что аксиомы 1)-4) векторного пространства  $V$  говорят о том, что относительно сложения  $V$  является абелевой группой.

Элементы векторного пространства называются *векторами*. То обстоятельство, что это слово часто употребляется в более узком смысле, не должно нас смущать. Геометрические представления, связанные с этим словом, помогут нам уяснить, а иногда и предвидеть, ряд результатов. Элементы поля  $F$ , в отличие от векторов, мы будем иногда, допуская вольность речи, называть числами, даже если  $F$  не является числовым полем.

**ПРИМЕР 1.** Векторы в смысле элементарной геометрии будем отныне называть *геометрическими векторами*. Операции над ними удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства, что, собственно, и послужило основой

для данного выше определения. Пространство геометрических векторов евклидовой плоскости (соотв., трехмерного евклидова пространства) будем обозначать через  $V^2$  (соотв.,  $V^3$ ). Подчеркнем, что это векторное пространство над полем  $\mathbb{R}$ .

ПРИМЕР 2. Множество  $M_{m \times n}(F)$  прямоугольных матриц размера  $m \times n$  с коэффициентами из поля  $F$  является векторным пространством над  $F$  относительно стандартных операций сложения матриц и умножения матриц на число.

ПРИМЕР 3. Множество  $F^n$  упорядоченных последовательностей  $(x_1, \dots, x_n)$  длины  $n$  с элементами  $x_i$  из поля  $F$  является векторным пространством над  $F$  относительно операций:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

$$\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

Это векторное пространство, по сути, есть векторное пространство матриц-строк  $M_{1 \times n}(F)$ . Отличие лишь формальное, так как первое определено как множество упорядоченных последовательностей чисел, а второе как множество матриц. Но элементы матрицы также записываются в определенном порядке. Ниже  $F^n$  часто будем называть пространством строк длины  $n$ .

ПРИМЕР 4. Множество  $F^M$  всех функций на множестве  $M$  со значениями в поле  $F$  является векторным пространством над  $F$  относительно обычных операций над функциями:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

ПРИМЕР 5. Множество  $C[a, b]$  непрерывных функций на отрезке  $[a, b]$  образует векторное пространство над  $\mathbb{R}$  относительно обычных операций над функциями.

Но множество непрерывных функций на отрезке  $[a, b]$  таких, что  $|f(x)| \leq 1$  не будет образовывать векторное пространство: из того, что  $|f_1(x)| \leq 1$  и  $|f_2(x)| \leq 1$ , не следует  $|f_1(x) + f_2(x)| \leq 1$ .

ПРИМЕР 6. Множество  $F_n[x]$  всех многочленов степени, не превышающей натурального числа  $n$ , с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на числа образует векторное пространство над  $F$ .

Заметим, что множество многочленов степени, равной  $n$ , не образует векторного пространства, так как сумма двух многочленов степени  $n$  может оказаться многочленом более низкой степени: например,  $(t^n + t) + (-t^n + t) = 2t$ .

ПРИМЕР 7. Множество  $F[x_1, \dots, x_n]$  всех многочленов от  $n$  переменных с коэффициентами из поля  $F$  является векторным пространством над  $F$  относительно обычных операций над многочленами.

**ПРИМЕР 8.** Пусть  $F$  – подполе поля  $L$ . Тогда  $L$  можно рассматривать как векторное пространство над  $F$ , определив умножение элементов из  $L$  на элементы из  $F$  просто как умножение в  $L$ . В частности, поле  $\mathbb{C}$  есть в этом смысле векторное пространство над  $\mathbb{R}$ .

Укажем некоторые следствия из аксиом векторного пространства. Их доказательство проводилось в 1-м семестре. Символом  $0$  обозначается как нуль поля  $F$ , так и нулевой вектор, т.е. нуль аддитивной группы  $V$  (смотри третью аксиому векторного пространства), это не приводит к путанице.

**Следствия из аксиом векторного пространства:**

- 1) Вектор нуль единствен.
- 2) Противоположный вектор единствен.
- 3) Для любых  $a, b \in V$  уравнение  $x + a = b$  имеет единственное решение, равное  $b + (-a)$ . Это решение называется *разностью* векторов  $b$  и  $a$  и обозначается  $b - a$ .
- 4) Сумма произвольного числа (а не только трех) векторов не зависит от расстановки скобок. (Пользуясь этим свойством, скобки обычно вообще опускают.)
- 5)  $\lambda 0 = 0$  для любого  $\lambda \in F$  (здесь  $0$  – нулевой вектор).
- 6)  $\lambda(-a) = -\lambda a$  для любых  $\lambda \in F, a \in V$ .
- 7)  $\lambda(a - b) = \lambda a - \lambda b$  для любых  $\lambda \in F, a, b \in V$ .
- 8)  $0a = 0$  для любого  $a \in V$  (здесь  $0$  слева – число, справа – вектор).
- 9)  $(-1)a = -a$  для любого  $a \in V$ .
- 10)  $(\lambda - \mu)a = \lambda a - \mu a$  для любых  $\lambda, \mu \in F, a \in V$ .

**Определение 1.2.** *Непустое подмножество  $U$  векторного пространства  $V$  над полем  $F$  называется **подпространством**, если оно замкнуто относительно сложения и относительно умножения на произвольные числа из  $F$ , т.е.*

- 1)  $\forall x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$ ,
- 2)  $\forall \lambda \in F \forall x \in U \Rightarrow \lambda x \in U$ .

**Замечание.** *В определении подпространства вместо условия непустоты множества  $U$  и наличия условия 1) можно потребовать, чтобы  $U$  являлось подгруппой аддитивной группы  $V$ . Действительно, в определении подгруппы требуется, чтобы*

$$x, y \in U \Rightarrow x + y \in U, \quad x \in U \Rightarrow -x \in U \quad \text{и} \quad 0 \in U.$$

*Первое из этих условий совпадает с условием 1) из определения подпространства. При наличии условия 2) из определения подпространства условие  $x \in U \Rightarrow -x \in U$  выполняется автоматически, так как  $(-1)x = -x$ . При наличии того же условия 2) условие  $0 \in U$  равносильно тому, что*

$U$  не пусто, так как если существует хотя бы один вектор  $x$  в  $U$ , то  $0 = 0x \in U$ .

Подпространство векторного пространства само является векторным пространством относительно тех же операций. Это дает множество новых примеров векторных пространств.

ПРИМЕР 9. В пространстве  $V^3$  геометрических векторов множество векторов, параллельных заданной плоскости или прямой, является подпространством.

ПРИМЕР 10. В пространстве  $\mathbb{R}^{[a,b]}$  всех функций на заданном отрезке  $[a, b]$  числовой прямой множество непрерывных функций является подпространством.

ПРИМЕР 11. В пространстве  $F^n$  строк длины  $n$  множество строк с нулями на четных местах образует подпространство, а множество с единицами на четных местах не образует подпространства.

ПРИМЕР 12. В пространстве квадратных матриц  $M_n(F)$  порядка  $n$  множество матриц с нулями под главной диагональю образует подпространство. Также в пространстве  $M_n(F)$  множество симметрических (соотв., кососимметрических) матриц, т.е. матриц  $A$  таких, что  $A = A^T$  (соотв.,  $A = -A^T$ ), образует подпространство.

ПРИМЕР 13. В пространстве  $F[x_1, \dots, x_n]$  всех многочленов от  $n$  переменных с коэффициентами из поля  $F$  множество симметрических многочленов, т.е. таких, которые не изменяются ни при каких перестановках переменных, образует подпространство.

В каждом векторном пространстве  $V$  есть два "тривиальных" подпространства: само пространство  $V$  и нулевое подпространство (состоящее из одного нулевого вектора).

Основным понятием теории векторных пространств является понятие линейной зависимости векторов, также подробно изученное в 1-м семестре.

**Определение 1.3.** Конечная система векторов  $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$  называется **линейно зависимой**, если найдутся не все равные нулю числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  такие, что  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ . Бесконечное подмножество  $S \subset V$  называется **линейно зависимым**, если некоторое непустое конечное подмножество  $\{v_1, \dots, v_m\} \subset S$  является линейно зависимым. Подмножество, не являющееся линейно зависимым, называется **линейно независимым**.

**Определение 1.4.** Всякое выражение вида  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$ , называется **линейной комбинацией** векторов  $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ . Если

не все  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  равны нулю, то линейная комбинация  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$  называется **нетривиальной**, в противном случае линейная комбинация называется **тривиальной**. Говорят, что вектор  $w \in V$  **линейно выражается** через векторы  $\{v_1, \dots, v_m\}$ , если он равен некоторой их линейной комбинации. Говорят, что вектор  $w \in V$  **линейно выражается** через некоторое подмножество  $S \subset V$ , если  $w$  линейно выражается через некоторое конечное подмножество  $\{v_1, \dots, v_m\} \subset S$ .

Очевидно, что если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она сама линейно зависима.

Заметим, что понятие системы векторов отличается от понятия множества векторов тем, что, во-первых, векторы системы предполагаются занумерованными и, во-вторых, среди них могут быть равные. Однако, свойство системы векторов быть линейно зависимой или независимой не зависит от нумерации векторов в ней.

В 1-м семестре были доказаны следующие леммы о линейно зависимых и линейно независимых системах.

**Лемма 1.1.** *(Критерий линейной зависимости)*

*Векторы  $v_1, \dots, v_m$  ( $m > 1$ ) линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные.*

**Лемма 1.2.** *Пусть векторы  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы. Вектор  $w$  линейно выражается через  $v_1, \dots, v_m$  тогда и только тогда, когда векторы  $v_1, \dots, v_m, w$  линейно зависимы.*

**Лемма 1.3.** *Пусть вектор  $w$  линейно выражается через векторы  $v_1, \dots, v_m$ . Это выражение единственно тогда и только тогда, когда векторы  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы.*

Пусть  $S \subset V$  – какое-то подмножество. Совокупность всевозможных (конечных) линейных комбинаций векторов из  $S$  называется **линейной оболочкой** этого подмножества и будет обозначаться через  $\langle S \rangle$ . Это наименьшее подпространство пространства  $V$ , содержащее  $S$ , т.е. любое подпространство, содержащее  $S$ , содержит и всю линейную оболочку  $\langle S \rangle$ . Говорят, что пространство  $V$  **порождается** множеством  $S$ , если  $\langle S \rangle = V$ . Векторное пространство называется **конечномерным**, если оно порождается конечным числом векторов, и **бесконечномерным** в противном случае.

Бесконечномерные пространства составляют предмет специального изучения. В данном курсе мы будем заниматься в основном конечномерными пространствами.

**Лемма 1.4.** *(Основная лемма о линейной зависимости)*

*Если векторное пространство  $V$  порождается  $n$  векторами, то всякие  $t > n$  векторов пространства  $V$  линейно зависимы.*

**Определение 1.5.** Система векторов  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$  называется **базисом** векторного пространства  $V$ , если каждый вектор  $x \in V$  единственным образом выражается через  $e_1, \dots, e_n$ . Коэффициенты этого выражения называются **координатами** вектора  $x$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .

Ввиду леммы 1.3 это определение базиса можно переформулировать следующим образом: **Базисом** векторного пространства  $V$  называется всякая линейно независимая система векторов, порождающая пространство  $V$ .

В 1-м семестре была доказана следующая теорема.

**Теорема 1.1.** *Всякое конечномерное векторное пространство  $V$  обладает базисом. Более точно, из всякого конечного порождающего множества  $S \subset V$  можно выбрать базис пространства  $V$ .*

Также из основной леммы о линейной зависимости была получена:

**Теорема 1.2.** *Все базисы конечномерного векторного пространства  $V$  имеют одно и то же число векторов.*

Это число называется **размерностью** пространства  $V$  и обозначается  $\dim V$ .

ПРИМЕР 14. Пространство  $V^2$  (соотв.,  $V^3$ ) имеет размерность 2 (соотв., 3).

ПРИМЕР 15. В качестве базиса пространства  $F^n$  можно выбрать единичные строки  $(1, 0, 0, \dots, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, \dots, 0, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, 0, 0, \dots, 0, 1)$  и  $\dim F^n = n$ .

ПРИМЕР 16. В пространстве матриц  $M_{m \times n}(F)$  размера  $m \times n$  в качестве базиса можно выбрать все матрицы, у которых на одном каком-либо месте стоит единица, а на остальных местах нули. Таким образом,  $\dim M_{m \times n}(F) = mn$ .

ПРИМЕР 17. Поле комплексных чисел как векторное пространство над  $\mathbb{R}$  имеет базис  $\{1, i\}$  и, соответственно, размерность 2. Алгебра кватернионов как векторное пространство над  $\mathbb{R}$  имеет базис  $\{1, i, j, k\}$  и, соответственно, размерность 4.

ПРИМЕР 18. Поле  $\mathbb{R}$  как векторное пространство над  $\mathbb{Q}$  бесконечномерно. В самом деле, если бы оно было конечномерным, то вещественное число определялось бы конечным набором рациональных чисел – своих координат в некотором базисе этого пространства. Но тогда множество всех вещественных чисел было бы счетным, что неверно.

ПРИМЕР 19. В пространстве  $F_n[x]$  многочленов степени  $\leq n$  простейшим базисом является совокупность векторов  $1, x, x^2, \dots, x^n$  и  $\dim F_n[x] = n + 1$ .

**ЗАДАЧА.** Доказать, что пространство всех непрерывных функций на любом промежутке числовой прямой бесконечномерно.

Из основной леммы о линейной зависимости следует, что в любом (конечном или бесконечном) множестве  $S$  векторов конечномерного векторного пространства  $V$  имеется максимальное линейно независимое подмножество, т.е.

такое линейно независимое подмножество, которое становится линейно зависимым при добавлении к нему любого вектора из оставшихся векторов множества  $S$ . Более того, любое линейно независимое подмножество множества  $S$  можно дополнить до максимального линейно независимого подмножества.

**Лемма 1.5.** *Всякое максимальное линейно независимое подмножество множества  $S$  конечномерного векторного пространства  $V$  является базисом линейной оболочки  $\langle S \rangle$  этого множества.*

В частности, применяя соображения, изложенные выше, к  $S = V$ , получаем, что базисом конечномерного векторного пространства  $V$  является всякая максимальная линейно независимая система векторов из  $V$ . Также получаем следующую теорему.

**Теорема 1.3.** *Всякую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства  $V$  можно дополнить до базиса.*

В частности, любой ненулевой вектор можно включить в базис, а любые  $n$  линейно независимых векторов векторного пространства размерности  $n$  уже составляют базис.

Напомним также следующую теорему из 1-го семестра, устанавливающую монотонность размерности.

**Теорема 1.4.** *Всякое подпространство  $U$  конечномерного векторного пространства  $V$  также конечномерно, причем  $\dim U \leq \dim V$ . Более того, если  $U \neq V$ , то  $\dim U < \dim V$ .*

## 1.2. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ДРУГОМУ БАЗИСУ.

Пусть  $V$  – векторное пространство над полем  $F$ ,  $\dim V = n$ . И пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  – какой-либо фиксированный базис. Тогда для любого вектора  $v \in V$  существуют числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$  такие, что  $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ . Набор чисел  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  есть набор координат вектора  $v$ , причем при заданном базисе координаты вектора  $v$  определены однозначно.

Если в базисе  $\mathcal{E}$  вектор  $x$  имеет координаты  $(x_1, \dots, x_n)$ , а вектор  $y$  – координаты  $(y_1, \dots, y_n)$ , т.е.

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n,$$

то

$$x + y = (x_1 + y_1) e_1 + (x_2 + y_2) e_2 + \dots + (x_n + y_n) e_n,$$

т.е. вектор  $x + y$  имеет координаты  $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ . Аналогично получаем, что вектор  $\lambda x$  имеет координаты  $(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ .

Таким образом, при сложении векторов  $x$  и  $y$  их координаты складываются. При умножении вектора  $x$  на число  $\lambda$  его координаты умножаются на это число.

Поэтому столбец (соотв., строка) координат линейной комбинации векторов есть линейная комбинация их столбцов (соотв., строк) координат с теми же коэффициентами. Отсюда следует, что *векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы их столбцы (соотв., строки) координат.*

ПРИМЕР 1. Рассмотрим пространство  $F^n$  строк длины  $n$ . Возьмем базис

$$e_1 = (1, 1, 1, \dots, 1),$$

$$e_2 = (0, 1, 1, \dots, 1),$$

.....

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

Найдем координаты  $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n)$  вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  в этом базисе. По определению

$$x = \chi_1 e_1 + \chi_2 e_2 + \dots + \chi_n e_n,$$

т.е.  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \chi_1(1, 1, 1, \dots, 1) + \chi_2(0, 1, 1, \dots, 1) + \dots + \chi_n(0, 0, \dots, 1) = (\chi_1, \chi_1 + \chi_2, \dots, \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_n)$ . Таким образом, числа  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$  находятся из следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \chi_1 = x_1, \\ \chi_1 + \chi_2 = x_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_n = x_n, \end{cases}$$

откуда  $\chi_1 = x_1, \chi_2 = x_2 - x_1, \dots, \chi_n = x_n - x_{n-1}$ .

Рассмотрим теперь в  $F^n$  базис из единичных строк:

$$e'_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e'_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

.....

$$e'_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

В этом базисе связь между координатами вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и числами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , определяющими этот вектор, наиболее проста:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, 0, \dots, 1) =$$

$= x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \dots + x_n e'_n$ , т.е. в  $F^n$  числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  можно трактовать как координаты вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  в базисе  $e'_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e'_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e'_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ .



ПРИМЕР 2. Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}_n[x]$  многочленов степени  $\leq n$ . Координатами многочлена  $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$  в простейшем базисе  $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, \dots, e^{n+1} = x^n$  являются, как легко видеть, его коэффициенты  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

Выберем теперь другой базис:

$$e'_1 = 1, e'_2 = (x - a), e'_3 = (x - a)^2, \dots, e'_{n+1} = (x - a)^n.$$

Каждый многочлен  $f(x)$  может быть представлен по формуле Тейлора в виде:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Таким образом, в этом базисе  $f(x)$  имеет координаты  $(f(a), f'(a), \dots, \frac{f^{(n)}(a)}{n!})$ .

Как видно из этих примеров, один и тот же вектор в разных базисах может иметь разные координаты. Нашей ближайшей целью является установление связи между координатами одного и того же вектора относительно двух различных базисов.

Пусть даны два базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  и  $\mathcal{E}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$  векторного пространства  $V$ . Выразим каждый вектор  $e'_j \in \mathcal{E}'$  через базис  $\mathcal{E}$ :

$$e'_j = t_{1,j}e_1 + t_{2,j}e_2 + \dots + t_{n,j}e_n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Из коэффициентов  $t_{i,j} \in F$  составим квадратную матрицу  $T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} = (t_{i,j})$ . При этом  $j$ -й столбец матрицы  $T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$  есть столбец координат вектора  $e'_j$  в базисе  $\mathcal{E}$ . Полученная матрица  $T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$  называется **матрицей перехода** от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\mathcal{E}'$ . Отметим, что  $\det T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} \neq 0$ , так как столбцами матрицы  $T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$  являются координаты линейно независимых векторов  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ .

Рассмотрим произвольный вектор  $x \in V$ . Пусть  $(x_1, \dots, x_n)$  – его координаты в базисе  $\mathcal{E}$ ,  $(x'_1, \dots, x'_n)$  – его координаты в базисе  $\mathcal{E}'$ , т.е.

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad (*)$$

и

$$x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n.$$

Подставляя в правую часть последнего равенства вместо каждого  $e'_j$  его выражение через базис  $\mathcal{E}$ , получаем

$$x = x'_1(t_{1,1}e_1 + t_{2,1}e_2 + \dots + t_{n,1}e_n) + x'_2(t_{1,2}e_1 + t_{2,2}e_2 + \dots + t_{n,2}e_n) + \dots + x'_n(t_{1,n}e_1 + t_{2,n}e_2 + \dots + t_{n,n}e_n).$$

Далее раскрываем скобки в полученной правой части и собираем вместе коэффициенты при каждом векторе  $e_i$ :

$$x = (x'_1 t_{1,1} + x'_2 t_{2,1} + \dots + x'_n t_{n,1})e_1 + (x'_1 t_{1,2} + x'_2 t_{2,2} + \dots + x'_n t_{n,2})e_2 + \dots + (x'_1 t_{1,n} + x'_2 t_{2,n} + \dots + x'_n t_{n,n})e_n. \quad (**)$$

Каждое из равенств (\*) и (\*\*) является разложением вектора  $x$  по базису  $\mathcal{E}$ . В силу единственности разложения вектора по базису получаем, что

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 t_{1,1} + x'_2 t_{1,2} + \dots + x'_n t_{1,n}, \\ x_2 = x'_1 t_{2,1} + x'_2 t_{2,2} + \dots + x'_n t_{2,n}, \\ \vdots \\ x_n = x'_1 t_{n,1} + x'_2 t_{n,2} + \dots + x'_n t_{n,n}, \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \dots & t_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \dots & t_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Положим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда полученную формулу преобразования координат при переходе от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\mathcal{E}'$  можно записать так:

$$X = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} X'. \quad (1)$$

### Свойства матриц перехода:

1) Пусть  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  – два базиса векторного пространства  $V$ . Тогда

$$T_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}} = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1}.$$

2) Пусть  $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$  – три базиса векторного пространства  $V$ . Тогда

$$T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}''} = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} T_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''}.$$

3) Пусть  $T = (t_{i,j})$  – произвольная квадратная невырожденная матрица,  $\mathcal{E}$  – произвольный базис векторного пространства  $V$ . Тогда система векторов  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ , полученных по формуле:

$$e'_j = t_{1,j} e_1 + t_{2,j} e_2 + \dots + t_{n,j} e_n, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

будет также являться базисом в  $V$ . Другими словами, любая квадратная невырожденная матрица  $T$  является матрицей перехода из данного базиса  $\mathcal{E}$  векторного пространства  $V$  в некоторый другой базис  $\mathcal{E}'$ .

**ЗАДАЧА.** Докажите эти свойства.

### 1.3. ИЗОМОРФИЗМ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ.

Для сравнения двух векторных пространств  $V$  и  $W$  над одним и тем же полем  $F$  вводится понятие изоморфизма.

**Определение 1.6.** Векторные пространства  $V$  и  $W$  над полем  $F$  называются **изоморфными**, если существует биективное отображение

$$\varphi : V \rightarrow W,$$

сохраняющее операции сложения и умножения на число:

$$1) \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ для любых } x, y \in V,$$

$$2) \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) \text{ для любых } \lambda \in F, x \in V.$$

В этом случае пишут  $V \cong W$ . Само отображение  $\varphi$  называется при этом **изоморфизмом** пространств  $V$  и  $W$ .

Отметим некоторые **свойства изоморфизма**:

(i)  $\varphi(0) = 0$ , причем в нуль пространства  $W$  переходит только нуль пространства  $V$ .

*Доказательство.* Свойство (i) следует из биективности и из 2-й аксиомы изоморфизма (см. определение 1.6), если положить  $\lambda = 0$ .  $\square$

(ii) Существует обратное отображение  $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$ , причем оно также является изоморфизмом.

*Доказательство.* Существование  $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$  следует из биективности отображения  $\varphi : V \rightarrow W$ . Проверим аксиомы изоморфизма (см. определение 1.6). Для произвольных  $x', y' \in W$  найдутся  $x, y \in V$  такие, что

$$\varphi(x) = x', \quad \varphi(y) = y',$$

а значит,

$$\varphi(x + y) = x' + y' \quad \text{и} \quad \varphi(\lambda x) = \lambda x'$$

для произвольного  $\lambda \in F$ . По определению обратного отображения имеем

$$\varphi^{-1}(x') = x, \quad \varphi^{-1}(y') = y, \quad \varphi^{-1}(x' + y') = x + y$$

и

$$\varphi^{-1}(\lambda x') = \lambda x.$$

Следовательно,

$$\varphi^{-1}(x' + y') = \varphi^{-1}(x') + \varphi^{-1}(y') \quad \text{и} \quad \varphi^{-1}(\lambda x') = \lambda \varphi^{-1}(x').$$

$\square$

(iii) Пусть  $U, V, W$  – векторные пространства над одним и тем же полем, причем  $U \cong V$  и  $V \cong W$ . Тогда  $U \cong W$ .

Проверьте свойство (iii) самостоятельно!

Как мы увидим ниже, описание векторных пространств с точностью до изоморфизма весьма просто. В частности, верно следующее утверждение

**Утверждение 1.1.** *Всякое векторное пространство  $V$  над полем  $F$  размерности  $n$  изоморфно пространству  $F^n$  строк длины  $n$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  – базис пространства  $V$ . Рассмотрим отображение

$$\varphi : V \rightarrow F^n,$$

ставящее в соответствие каждому вектору  $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$  строку его координат  $(x_1, \dots, x_n)$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . В силу единственности разложения вектора по базису это отображение корректно определено. Очевидно, что это биективное отображение.

Проверим свойства 1) и 2) определения изоморфизма. Если

$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n,$$

$$y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n,$$

то

$$x + y = (x_1 + y_1)e_1 + \dots + (x_n + y_n)e_n,$$

$$\lambda x = (\lambda x_1)e_1 + \dots + (\lambda x_n)e_n.$$

Значит,

$$\varphi(x + y) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$\varphi(\lambda x) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda(x_1, \dots, x_n) = \lambda\varphi(x).$$

Отсюда следует, что  $\varphi$  – изоморфизм. ■

Следующая теорема дает исчерпывающее описание всех конечномерных векторных пространств.

**Теорема 1.5.** *Конечномерные векторные пространства над одним и тем же полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

*Доказательство.* Пусть  $\varphi : V \rightarrow W$  – изоморфизм векторных пространств  $V$  и  $W$  и  $\{e_1, \dots, e_n\}$  – базис пространства  $V$ . Проверим, что  $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$  – базис пространства  $W$ , откуда будет следовать, что  $\dim V = \dim W$ .

1) Система векторов  $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$  линейно независима.

Действительно, допустим, что это не так. Тогда найдутся не все равные нулю числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$  такие, что

$$\lambda_1\varphi(e_1) + \dots + \lambda_n\varphi(e_n) = 0.$$

Так как изоморфизм сохраняет операции, получаем

$$\varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0.$$

А так как при изоморфизме в нуль переходит только нуль, отсюда следует, что

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0,$$

что противоречит линейной независимости базиса  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .

2) Любой вектор  $x' \in W$  линейно выражается через  $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ .

В самом деле, рассмотрим  $x = \varphi^{-1}(x') \in V$ . Этот вектор раскладывается по базису  $\{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$ :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Применяя к этому равенству изоморфизм  $\varphi$  и пользуясь тем, что изоморфизм сохраняет операции, получаем

$$x' = \varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n).$$

Обратно, согласно Утверждению 1.1, всякое  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $F$  изоморфно  $F^n$ ; следовательно, все такие пространства изоморфны между собой. ■

Таким образом, с точностью до изоморфизма для любого  $n$  есть только одно пространство размерности  $n$ , например,  $F^n$ . И в любом рассуждении мы вправе заменить произвольное  $n$ -мерное пространство над полем  $F$  пространством строк  $F^n$ .

## 2. СУММА И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВ.

Пусть  $V$  – векторное пространство над полем  $F$ ,  $U$  и  $W$  – его подпространства. Легко проверить, что теоретико-множественное пересечение  $U \cap W$ , т.е. совокупность векторов, принадлежащих обоим этим подпространствам, также есть подпространство в  $V$ . Это наибольшее подпространство, содержащееся как в  $U$ , так и в  $W$ .

Теоретико-множественное объединение  $U \cup W$ , т.е. совокупность векторов, принадлежащих либо подпространству  $U$ , либо подпространству  $W$ , напротив, не обязано быть подпространством, как показывает следующий пример.

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим плоскость  $V^2$  и стандартный прямоугольный базис  $\{i, j\}$  плоскости. Пусть  $U = \langle i \rangle$ , т.е. это ось  $OX$ ,  $W = \langle j \rangle$ , т.е. это ось  $OY$ . Тогда  $U \cup W = OX \cup OY = \{\lambda i \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{\mu j \mid \mu \in \mathbb{R}\}$  содержит векторы  $i$  и  $j$ , но не содержит их суммы  $i + j$ , что противоречит определению подпространства.

Если какое-то подпространство содержит  $U$  и  $W$ , то оно обязано содержать и всевозможные суммы  $u + w$ , где  $u \in U, w \in W$ .

**Определение 2.1.** Суммой  $U + W$  подпространств  $U$  и  $W$  называется совокупность векторов вида  $u + w$ , где  $u \in U, w \in W$ .

Легко проверить, что сумма  $U + W$  подпространств действительно является подпространством в  $V$ . Это наименьшее подпространство, содержащее как  $U$ , так и  $W$ .

Отметим, что в общем случае запись вектора  $x \in U + W$  в виде  $u + w$  может быть неоднозначной.

**ПРИМЕР 2.** Рассмотрим пространство  $V^3$  и стандартный прямоугольный базис  $\{i, j, k\}$  пространства. Пусть  $U = \langle i, j \rangle$ , т.е. это плоскость  $OXY$ ,  $W = \langle j, k \rangle$ , т.е. это плоскость  $OYZ$ . Сумма  $U + W = \langle i, j, k \rangle$  совпадает со всем пространством  $V^3$ . При этом вектор  $i + j + k \in U + W$  можно представить двумя способами в виде  $u + w$ , где  $u \in U, w \in W$ : как сумму вектора  $i + j \in U$  и вектора  $k \in W$  и как сумму вектора  $i \in U$  и вектора  $j + k \in W$ . Отметим, что в данном примере пересечением  $U \cap W = \langle j \rangle$  является ось  $OY$ .

**Определение 2.2.** Сумма подпространств  $U$  и  $W$  называется **прямой** и обозначается  $U \oplus W$ , если каждый вектор  $v \in U \oplus W$  единственным образом представим в виде  $u + w$ , где  $u \in U, w \in W$ . При этом  $u$  называется проекцией вектора  $v$  на  $U$ ,  $w$  – проекцией вектора  $v$  на  $W$ .

**ПРИМЕР 3.** Плоскость  $V^2$  является прямой суммой осей  $OX$  и  $OY$ .

**Утверждение 2.1.** Сумма подпространств  $U$  и  $W$  является прямой тогда и только тогда, когда  $U \cap W = \{0\}$ .

*Доказательство.* Пусть сумма подпространств  $U$  и  $W$  является прямой. Допустим, что в пересечении  $U \cap W$  содержится ненулевой вектор  $v$ . Тогда  $v \in U + W$  представим двумя способами в виде  $u + w$ , где  $u \in U, w \in W$  :

$$v = 0 + v, 0 \in U, v \in W,$$

$$v = v + 0, v \in U, 0 \in W,$$

что противоречит определению прямой суммы подпространств  $U$  и  $W$ . Это противоречие доказывает, что  $U \cap W = \{0\}$ .

Обратно, пусть  $U \cap W = \{0\}$ . Допустим, что сумма подпространств  $U$  и  $W$  не является прямой. Значит, найдется вектор  $v \in U + W$ , который имеет два различных представления:  $v = u_1 + w_1$  и  $v = u_2 + w_2$ , где  $u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in W$ . Отсюда следует, что  $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ . Переносим  $u_2$  влево, а  $w_1$  вправо, получаем вектор  $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$ , который принадлежит  $U \cap W$ , так как  $u_1 - u_2 \in U, w_2 - w_1 \in W$ . В силу того, что в пересечении подпространств  $U$  и  $W$  содержится только нулевой вектор, получаем  $u_1 - u_2 = 0, w_2 - w_1 = 0$ . Откуда  $u_1 = u_2, w_1 = w_2$ , что противоречит тому, что  $v = u_1 + w_1$  и  $v = u_2 + w_2$  были двумя различными представлениями вектора  $v$ . ■

**ПРИМЕР 4.** Рассмотрим пространство  $V = M_n(F)$  квадратных матриц порядка  $n$ . Множество симметрических (соотв., кососимметрических) матриц образует подпространство  $U$  (соотв.,  $W$ ) в пространстве  $M_n(F)$ . При условии, что характеристика поля  $\text{char } F$  отлична от 2, всякая матрица  $A$  может быть представлена в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц:

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

С другой стороны, при том же условии очевидно, что матрица, являющаяся одновременно симметрической и кососимметрической, равна нулю. Это означает, что пространство матриц раскладывается в прямую сумму подпространства симметрических и подпространства кососимметрических матриц, т.е.  $M_n(F) = U \oplus W$ .

**ПРИМЕР 5.** Рассмотрим пространство  $V$  всех функций на вещественной прямой. Множество четных (соотв., нечетных) функций образует подпространство  $U$  (соотв.,  $W$ ) в пространстве  $V$  всех функций. Всякая функция  $f$  может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

С другой стороны, функция, являющаяся одновременно четной и нечетной, тождественно равна нулю. Это означает, что пространство всех функций на вещественной прямой является прямой суммой подпространства четных и нечетных функций. (В этом примере векторное пространство и оба подпространства бесконечномерны.)

**Определение 2.3.** Суммой  $V_1 + \dots + V_m$  подпространств  $V_1, \dots, V_m \subset V$  называется совокупность векторов вида  $v_1 + \dots + v_m$ , где  $v_i \in V_i$ .

Это наименьшее подпространство, содержащее все подпространства  $V_1, \dots, V_m$ .

**Определение 2.4.** Сумма  $V_1 + \dots + V_m$  подпространств  $V_1, \dots, V_m \subset V$  называется **прямой** и обозначается  $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ , если каждый вектор  $v \in V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  однозначно представляется в виде  $v_1 + \dots + v_m$ , где  $v_i \in V_i$ ; вектор  $v_i$  называется **проекцией** вектора  $v$  на подпространство  $V_i$ .

Напрашивающееся обобщение Утверждения 2.1 для любого числа подпространств неверно. Как показывает следующий пример, из того, что все попарные пересечения  $V_i \cap V_j$  подпространств равны нулевому подпространству  $\{0\}$ , не следует, что сумма подпространств  $V_1 + V_2 + \dots + V_m$  является прямой.

**ПРИМЕР 6.** Рассмотрим пространство  $V^3$  и три его подпространства  $V_1 = \langle i \rangle$ ,  $V_2 = \langle i - j \rangle$ ,  $V_3 = \langle i + j \rangle$ . Очевидно,  $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = \{0\}$ . Однако сумма  $V_1 + V_2 + V_3$  не является прямой, так как вектор  $i \in V_1 + V_2 + V_3$  имеет два различных представления:  $i = i + 0 + 0$  и  $i = 0 + \frac{1}{2}(i - j) + \frac{1}{2}(i + j)$ .

Обобщение Утверждения 2.1 на случай  $m$  слагаемых дает следующий результат.

**Утверждение 2.2.** Сумма подпространств  $V_1 + V_2 + \dots + V_m$  векторного пространства  $V$  является прямой тогда и только тогда, когда

$$V_i \cap (V_{i+1} + \dots + V_m) = \{0\}$$

для любого  $i = 1, 2, \dots, m - 1$ .

*Доказательство.* Пусть сумма  $V_1 + V_2 + \dots + V_m$  — прямая. Предположим, что для некоторого  $i$  существует ненулевой вектор

$$v \in V_i \cap (V_{i+1} + \dots + V_m) \subset V_1 + V_2 + \dots + V_m.$$

Тогда имеются два различных представления этого вектора:

$$v = v + 0, \quad v \in V_i, \quad 0 \in V_{i+1} + \dots + V_m$$

и

$$v = 0 + v, \quad 0 \in V_i, \quad v \in V_{i+1} + \dots + V_m,$$

что противоречит определению прямой суммы.

Обратно, пусть  $V_i \cap (V_{i+1} + \dots + V_m) = \{0\}$  для любого  $i = 1, 2, \dots, m - 1$ , но сумма  $V_1 + V_2 + \dots + V_m$  не является прямой. Тогда для некоторого вектора  $v$  из суммы  $V_1 + V_2 + \dots + V_m$  существуют два различных разложения

$$v = u_1 + \dots + u_m, \quad u_i \in V_i$$

и

$$v = w_1 + \dots + w_m, \quad w_i \in V_i.$$



Откуда  $u_1 + \dots + u_m = w_1 + \dots + w_m$ . Переносим члены в левую часть и группируя, получим  $v_1 + \dots + v_m = 0$ , где  $v_i = u_i - w_i \in V_i$ , причем не все слагаемые равны нулю. Пусть  $v_i$  – первое ненулевое слагаемое. Тогда

$$V_i \ni v_i = -v_{i+1} - \dots - v_m \in V_{i+1} + \dots + V_m,$$

что противоречит тому, что  $V_i \cap (V_{i+1} + \dots + V_m) = \{0\}$ . ■

**Замечание.** Часто используется другое, формально более сильное, однако эквивалентное, условие: пересечение каждого подпространства  $V_i$  с суммой всех остальных равно нулю.

**ПРИМЕР 7.** Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  – базис векторного пространства  $V$ . Тогда  $V = \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$ .

Подчеркнем, что проекция вектора на подпространство  $V_i$  зависит не только от этого подпространства, но и от остальных слагаемых разложения  $V_1 + V_2 + \dots + V_m$ .

**ЗАДАЧА.** Приведите пример, подтверждающий это высказывание.

Нашей дальнейшей целью будет доказательство следующей важной теоремы.

**Теорема 2.1.** Для любых двух подпространств  $U$  и  $W$  конечномерного векторного пространства  $V$  над полем  $F$  справедлива формула

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \quad (2)$$

Формула (2) называется **формулой Грассмана**.

*Доказательство.* Мы воспользуемся Теоремой 1.3 о том, что всякую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства можно дополнить до базиса этого пространства. Выберем базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\}$  в подпространстве  $U \cap W$  и дополним его векторами  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_l\}$  до базиса подпространства  $U$  и векторами  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_m\}$  до базиса подпространства  $W$ . Для доказательства формулы (2) достаточно показать, что  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  – базис суммы  $U + W$  подпространств  $U$  и  $W$ .

Любой вектор  $v$  из суммы  $U + W$  есть  $u + w$ , где  $u \in U, w \in W$ . Вектор  $u$  выражается через базис  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$  подпространства  $U$ , вектор  $w$  – через базис  $\mathcal{E} \cup \mathcal{G}$  подпространства  $W$ . Поэтому  $u + w$  выражается через систему векторов  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ , которая в свою очередь принадлежит сумме  $U + W$ . Значит,  $U + W$  равно линейной оболочке  $\langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle$  системы векторов  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ .

Остается показать, что система  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  линейно независима. Предположим противное. Пусть имеется нетривиальная линейная комбинация векторов из системы  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ , равная нулю. Группируя в ней слагаемые, получим

$$(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k) + (\beta_1 f_1 + \dots + \beta_l f_l) + (\gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_m g_m) = 0,$$

т.е.

$$a + b + c = 0,$$

где

$$a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k \in \langle \mathcal{E} \rangle, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in F,$$

$$b = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_l f_l \in \langle \mathcal{F} \rangle, \quad \beta_1, \dots, \beta_l \in F,$$

$$c = \gamma_1 g_1 + \dots + \gamma_m g_m \in \langle \mathcal{G} \rangle, \quad \gamma_1, \dots, \gamma_m \in F.$$

С одной стороны, имеем

$$b = -a - c \in \langle \mathcal{E}, \mathcal{G} \rangle = W,$$

с другой стороны,

$$b \in \langle \mathcal{F} \rangle \subset U,$$

таким образом,  $b \in U \cap W = \langle \mathcal{E} \rangle$ . Однако система  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$  линейно независима, так что  $\langle \mathcal{E} \rangle \cap \langle \mathcal{F} \rangle = \{0\}$ . Отсюда

$$b = 0,$$

а значит,  $\beta_1 = 0, \dots, \beta_l = 0$ . Остается равенство

$$a + c = 0.$$

Отсюда в силу линейной независимости множества  $\mathcal{E} \cup \mathcal{G}$  вытекает, что

$$a = 0 \text{ и } c = 0,$$

а значит,  $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0, \gamma_1 = 0, \dots, \gamma_m = 0$ . Линейная независимость системы  $\mathcal{E} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  доказана. Тем самым доказана и формула Грассмана. ■

**ЗАДАЧА.** Приведите пример векторного пространства  $V$  и его трех подпространств  $V_1, V_2, V_3$ , для которых

$$\begin{aligned} \dim (V_1 + V_2 + V_3) \neq \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 - \dim (V_1 \cap V_2) - \\ - \dim (V_1 \cap V_3) - \dim (V_2 \cap V_3) + \dim (V_1 \cap V_2 \cap V_3). \end{aligned}$$

**Следствие 2.1.** Сумма двух подпространств  $U$  и  $W$  конечномерного векторного пространства  $V$  является прямой тогда и только тогда, когда

$$\dim (U + W) = \dim U + \dim W.$$

Из следствия 2.1 индукцией по количеству слагаемых в прямой сумме  $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  легко вытекает также следующая формула:

$$\dim (V_1 \oplus \dots \oplus V_m) = \dim V_1 + \dots + \dim V_m.$$

### 3. СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО.

#### 3.1. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ.

Пусть  $V$  – векторное пространство над полем  $F$ . Одновременно с  $V$  часто рассматривают другое, тесно связанное с ним пространство, так называемое сопряженное пространство. Для того чтобы сформулировать определение сопряженного пространства, нам понадобится определение линейной функции.

**Определение 3.1.** *Линейной функцией (или линейной формой) называется отображение  $\varphi : V \rightarrow F$ , обладающее свойствами:*

- 1)  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$  для любых  $x, y \in V$ ;
- 2)  $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$  для любых  $\lambda \in F, x \in V$ .

**ПРИМЕР 1.** В пространстве геометрических векторов  $V^3$  отображение

$$\varphi(x) = (x, a),$$

где  $a \in V^3$  – некоторый фиксированный вектор, является линейной функцией, так как скалярное произведение линейно по первому аргументу.

**ПРИМЕР 2.** В пространстве  $C[a, b]$ , векторами которого являются непрерывные функции  $f(x)$ , заданные на отрезке  $[a, b]$ , отображение

$$\varphi(f) = \int_a^b f(t)dt$$

является линейной функцией. Действительно, условие 1) означает, что интеграл суммы равен сумме интегралов, а условие 2) означает, что постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

**ПРИМЕР 3.** В пространстве  $C[a, b]$  отображение

$$\varphi(f) = f(x_0),$$

где  $x_0$  – произвольное фиксированное число из отрезка  $[a, b]$ , является линейной функцией. Проверьте это!

**ПРИМЕР 4.** Из свойств производных следует, что отображение

$$\varphi(f) = f'(x_0) \quad (x_0 \in \mathbb{R})$$

является линейной функцией на векторном пространстве  $C'(\mathbb{R})$  дифференцируемых функций на вещественной прямой.

**ПРИМЕР 5. Следом** квадратной матрицы называется сумма ее диагональных элементов. След матрицы  $A \in M_n(F)$  обозначается через  $\text{tr } A$ . Отображение

$$\varphi(A) = \text{tr } A$$

является линейной функцией на пространстве  $M_n(F)$  квадратных матриц. Проверьте это!

Отметим, что определитель также является функцией на  $M_n(F)$ , но эта функция не является линейной, так как  $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ .

**ПРИМЕР 6.** В пространстве  $F^n$  строк длины  $n$  отображение ( $i$ -я проекция)

$$\varphi_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_i$$

является линейной функцией.

Множество всех функций на пространстве  $V$  со значениями в поле  $F$  образует векторное пространство над  $F$  относительно операций обычного поточечного сложения функций и умножения функции на число:

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v),$$

$$(\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v),$$

где  $\varphi, \psi$  – произвольные функции на  $V$ ,  $v$  – произвольный вектор из  $V$ , а  $\lambda$  – произвольное число из  $F$ . Множество всех линейных функций образует подпространство в этом векторном пространстве, так как сумма линейных функций и произведение линейной функции на число есть снова линейная функция.

**Определение 3.2.** *Пространство всех линейных функций на  $V$  называется сопряженным пространством по отношению к  $V$  и обозначается через  $V^*$ .*

Рассмотрим  $n$ -мерное пространство  $V$  и выберем в нем произвольный базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Значение линейной функции  $\varphi \in V^*$  на векторе  $x \in V$  может быть выражено через координаты этого вектора  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \quad (3)$$

где  $a_i = \varphi(e_i)$ . Числа  $a_1 = \varphi(e_1), \dots, a_n = \varphi(e_n)$  не зависят от вектора  $x$ , а определяются только функцией  $\varphi$  и базисом  $\mathcal{E}$ . Линейная функция  $\varphi$  однозначно определяется своими значениями  $a_1, \dots, a_n$  на базисных векторах. Эти значения называются **коэффициентами** функции  $\varphi$  в базисе  $\mathcal{E}$ . Коэффициенты могут быть произвольными: для любых  $n$  чисел  $a_1, \dots, a_n \in F$  функция  $\varphi$ , определяемая формулой  $\varphi(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ , является линейной. Нетрудно проверить также, что если  $a_1, \dots, a_n$  – коэффициенты линейной функции  $\varphi$  в базисе  $\mathcal{E}$ , а  $b_1, \dots, b_n$  – коэффициенты линейной функции  $\psi$  в этом же базисе, то  $a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n$  – коэффициенты суммы  $\varphi + \psi$ , а  $\lambda a_1, \dots, \lambda a_n$  – коэффициенты  $\lambda\varphi$ , где  $\lambda \in F$ . Отсюда следует, что  $V^*$  изоморфно пространству  $F^n$  строк длины  $n$ . Из этого получаем два утверждения:

**Утверждение 3.1.** *Для любого конечномерного векторного пространства  $V$  имеем  $\dim V = \dim V^*$ .*

**Утверждение 3.2.** Для любого конечномерного векторного пространства  $V$  имеем  $V \cong V^*$ .

Отметим, что если  $V$  бесконечномерно, то  $V$  и  $V^*$  не являются изоморфными.

Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  – произвольный базис пространства  $V$ . Определим систему функций  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n \in V^*$ , полагая

$$\varepsilon^i(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

или, используя символ Кронекера,

$$\varepsilon^i(e_j) = \delta_j^i,$$

т.е. строка коэффициентов функции  $\varepsilon^i$  есть  $i$ -я строка единичной матрицы. Отсюда легко следует, что функции  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$  линейно независимы. Так как пространство  $V^*$   $n$ -мерно, эти функции составляют в нем базис.

**Определение 3.3.** Базис  $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$  пространства  $V^*$ , определяемый формулой

$$\varepsilon^i(e_j) = \delta_j^i,$$

называется **сопряженным** по отношению к базису  $\{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$ .

Имея в  $V$  и  $V^*$  сопряженные базисы, легко вычислить координаты любого вектора. Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  – базис в  $V$ ,  $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$  – сопряженный базис относительно  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Для произвольного вектора  $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n \in V$  верно, что

$$\varepsilon^i(x) = \varepsilon^i(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1\varepsilon^i(e_1) + \dots + x_n\varepsilon^i(e_n) = x_i.$$

Следовательно, координаты  $x_i$  вектора  $x$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$  вычисляются по формуле  $x_i = \varepsilon^i(x)$  и

$$x = \varepsilon^1(x)e_1 + \dots + \varepsilon^n(x)e_n.$$

Аналогично для произвольной линейной функции  $\varphi = a_1\varepsilon^1 + \dots + a_n\varepsilon^n \in V^*$  верно, что

$$\varphi(e_i) = a_1\varepsilon^1(e_i) + \dots + a_n\varepsilon^n(e_i) = a_i.$$

Следовательно координаты  $a_i$  вектора  $\varphi \in V^*$  в базисе  $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$  вычисляются по формуле  $a_i = \varphi(e_i)$  и

$$\varphi = \varphi(e_1)\varepsilon^1 + \dots + \varphi(e_n)\varepsilon^n.$$

Отметим, что коэффициенты линейной функции  $\varphi$  в базисе  $\mathcal{E}$  совпадают с ее координатами в базисе, сопряженном к  $\mathcal{E}$ .

### 3.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ В $V^*$ .

**Утверждение 3.3.** Пусть даны два базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  и  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  векторного пространства  $V$ . Рассмотрим базисы  $\mathcal{F} = \{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$  и  $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{\varepsilon}^1, \dots, \tilde{\varepsilon}^n\}$  пространства  $V^*$ , сопряженные к  $\mathcal{E}$  и  $\tilde{\mathcal{E}}$  соответственно. Если  $T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}} = T = (t_{i,j})$  – матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}$ , то матрица перехода  $T_{\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}}$  от базиса  $\tilde{\mathcal{F}}$  к базису  $\mathcal{F}$  равняется матрице  $T^t$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $S = (s_{i,j})$  – матрицу перехода  $T_{\mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}}$  от базиса  $\mathcal{F}$  к базису  $\tilde{\mathcal{F}}$ , а через  $s_{i,j}^t$  – элементы матрицы  $S^t$ , т.е.  $s_{i,j}^t = s_{j,i}$ . Тогда для каждых  $k, l = \overline{1, n}$

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}^k &= \sum_{i=1}^n s_{i,k} \varepsilon^i, \\ \tilde{e}_l &= \sum_{j=1}^n t_{j,l} e_j.\end{aligned}$$

Используя равенства  $\tilde{\varepsilon}^k(\tilde{e}_l) = \delta_l^k$  и  $\varepsilon^i(e_j) = \delta_j^i$ , получаем

$$\delta_l^k = \sum_{i=1}^n s_{i,k} \varepsilon^i \left( \sum_{j=1}^n t_{j,l} e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n s_{i,k} t_{j,l} \varepsilon^i(e_j) = \sum_{i=1}^n s_{i,k} t_{i,l} = \sum_{i=1}^n s_{k,i}^t t_{i,l}.$$

Следовательно,  $S^t T = E$ . А значит,  $S^{-1} = T^t$ . Откуда получаем требуемое, так как  $T_{\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}} = S^{-1}$ . ■

### 3.3. ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМОСТЬ $V$ И $V^*$ .

В предыдущем изложении  $V$  и  $V^*$  играли различную роль. Мы покажем, что они совершенно равноправны, т.е. что все теоремы останутся справедливыми, если мы поменяем  $V$  и  $V^*$  ролями.

Пространство  $V^*$  – такое же векторное пространство, как и любое другое, и, следовательно, имеет сопряженное пространство  $V^{**} = (V^*)^*$ , элементы которого – линейные функции на  $V^*$ . Покажем, что второе сопряженное пространство  $V^{**} = (V^*)^*$  оказывается естественно изоморфным пространству  $V$ .

Для любого вектора  $x \in V$  рассмотрим функцию  $f_x$  на  $V^*$ , определенную по формуле

$$f_x(\varphi) = \varphi(x), \varphi \in V^*.$$

Из определения операций в  $V^*$  следует, что  $f_x$  – линейная функция.

**Утверждение 3.4.** Отображение  $\Phi : V \rightarrow V^{**}$ , переводящее каждый вектор  $x \in V$  в линейную функцию  $f_x \in V^{**}$ , является изоморфизмом конечномерного пространства  $V$  и пространства  $V^{**}$ .

*Доказательство.* 1) Докажем, что  $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$  для любых векторов  $x, y \in V$ . Так как  $\Phi(x + y) = f_{x+y}$ ,  $\Phi(x) + \Phi(y) = f_x + f_y$ , требуется доказать, что линейная функция  $f_{x+y}$  равна линейной функции  $f_x + f_y$ . Для любого вектора  $\varphi \in V^*$  имеем

$$f_{x+y}(\varphi) = \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = f_x(\varphi) + f_y(\varphi) = (f_x + f_y)(\varphi).$$

Откуда получаем равенство  $f_{x+y} = f_x + f_y$ , так как две функции равны тогда и только тогда, когда равны значения этих функций для каждого аргумента.

Равенство  $\Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x)$  для любых  $x \in V, \lambda \in F$  доказывается аналогично.

2) Остается проверить, что отображение  $\Phi$  биективно. Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  – некоторый базис пространства  $V$  и  $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$  – сопряженный базис пространства  $V^*$ . Тогда

$$f_{e_i}(\varepsilon^j) = \varepsilon^j(e_i) = \delta_i^j,$$

так что  $\{f_{e_1}, \dots, f_{e_n}\}$  – базис пространства  $V^{**}$ , сопряженный базису  $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ .

Так как

$$\Phi(x) = \Phi(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1\Phi(e_1) + \dots + x_n\Phi(e_n) = x_1f_{e_1} + \dots + x_nf_{e_n},$$

то отображение  $\Phi$  переводит вектор  $x$  с координатами  $x_1, \dots, x_n$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$  в вектор  $f_x = \Phi(x)$  с такими же координатами в базисе  $\{f_{e_1}, \dots, f_{e_n}\}$  пространства  $V^{**}$ . Следовательно,  $\Phi$  биективно. ■

Таким образом, можно отождествить пространства  $V$  и  $V^{**}$  посредством указанного изоморфизма, т.е. рассматривать каждый вектор  $x \in V$  одновременно и как линейную функцию на  $V^*$  и писать  $x(\varphi)$  вместо  $f_x(\varphi)$ . При таком соглашении пространства  $V$  и  $V^*$  будут играть совершенно симметричную роль.

**Следствие 3.1.** *Всякий базис пространства  $V^*$  сопряжен некоторому базису пространства  $V$ .*

Часто вместо  $\varphi(x)$  и  $x(\varphi)$  пишут  $\langle \varphi | x \rangle$ , желая подчеркнуть равноправие векторов и функций. Фиксация  $\varphi$  приводит к линейной функции на векторах, фиксация  $x$  приводит к линейной функции на линейных функциях.

**Замечание 3.1.** *Если пространство  $V$  бесконечномерно, то пространство  $V^*$  и, тем более,  $V^{**}$  имеет бóльшую размерность.*

### 3.4. ПОДПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ.

Из 1-го семестра знаем, что множество решений произвольной однородной системы линейных уравнений с  $n$  неизвестными образует подпространство в пространстве строк длины  $n$ . Оказывается, всякое подпространство является множеством решений некоторой однородной системы линейных уравнений.

**Определение 3.4.** Пусть на произвольном векторном пространстве  $V$  над полем  $F$  определена линейная функция  $\varphi$ . Назовем **ядром** линейной функции  $\varphi$  множество

$$\text{Ker } \varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}.$$

**Утверждение 3.5.** Ядро любой линейной функции  $\varphi$  является подпространством в векторном пространстве  $V$  над полем  $F$ .

*Доказательство.* Для начала, отметим, что  $\text{Ker } \varphi$  не пусто, так как

$$0 \in \text{Ker } \varphi.$$

Далее, если  $u, v \in \text{Ker } \varphi$ , то  $\varphi(u) = 0$  и  $\varphi(v) = 0$ . Поэтому

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) = 0 + 0 = 0,$$

что означает  $u + v \in \text{Ker } \varphi$ .

Если  $\lambda \in F$ ,  $u \in \text{Ker } \varphi$ , то  $\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u) = \lambda 0 = 0$ . Значит,  $\lambda u \in \text{Ker } \varphi$ .

Это доказывает, что  $\text{Ker } \varphi$  является подпространством в  $V$ . ■

**Теорема 3.1.** Пусть  $V$  – конечномерное векторное пространство над полем  $F$ . Тогда

1) всякое подпространство  $U$  пространства  $V$  есть пересечение ядер некоторого конечного множества линейных функций;

2) при фиксированном базисе каждое подпространство  $U$  пространства  $V$  есть множество векторов, координаты которых являются решениями подходящей однородной системы линейных уравнений.

*Доказательство.*

1) Выберем в подпространстве  $U$  базис  $\{e_1, \dots, e_k\}$ . Дополним этот базис векторами  $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$  до базиса всего пространства  $V$  (Теорема 1.3). Пусть  $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$  – базис, сопряженный к базису  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ . Докажем, что  $U = \text{Ker } \varepsilon^{k+1} \cap \dots \cap \text{Ker } \varepsilon^n$ .

Действительно, возьмем произвольный вектор  $x \in V$  и выразим его через базис  $\mathcal{E}$  в виде:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k + x_{k+1} e_{k+1} + \dots + x_n e_n.$$



Учитывая, что  $x_i = \varepsilon^i(x)$ , получаем

$$x \in U \Leftrightarrow \begin{cases} x_{k+1} = 0; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon^{k+1}(x) = 0; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varepsilon^n(x) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \text{Ker } \varepsilon^{k+1} \cap \dots \cap \text{Ker } \varepsilon^n,$$

что и требовалось.

2) Пусть  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  – некоторый фиксированный базис,  $T$  – матрица перехода от базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Если  $x = \tilde{x}_1\tilde{e}_1 + \dots + \tilde{x}_n\tilde{e}_n$ , то по формуле (1) преобразования координат вектора при переходе к другому базису имеем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $\check{T}$  матрицу, состоящую из последних  $n - k$  строк матрицы  $T$ . Так как

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \check{T} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$$

и

$$x \in U \Leftrightarrow \begin{cases} x_{k+1} = 0; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = 0; \end{cases}$$

получаем, что

$$x \in U \Leftrightarrow \check{T} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = 0,$$

т.е. координаты  $\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$  векторов  $x \in U$  в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$  являются множеством решений однородной системы линейных уравнений с матрицей  $\check{T}$ . ■

#### 4. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

Мы переходим к рассмотрению основного предмета нынешнего семестра – к рассмотрению линейных операторов. Теория линейных операторов – это ядро линейной алгебры и главный источник ее многочисленных приложений.

##### 4.1. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ.

Пусть  $V$  и  $W$  – векторные пространства над полем  $F$ .

**Определение 4.1.** *Отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  называется линейным, если  $\varphi$  сохраняет операции сложения и умножения на число:*

- 1)  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in V$ ;
- 2)  $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \quad \forall \lambda \in F, \forall x \in V$ .

Это определение отличается от определения изоморфизма векторных пространств тем, что в нем не требуется биективности.

**Простейшие свойства линейных отображений:**

- 1)  $\varphi(0) = 0$ ;
- 2)  $\varphi(-x) = -\varphi(x) \quad \forall x \in V$ ;
- 3)  $\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) \quad x, y \in V$ .

Докажите эти свойства!

**ПРИМЕР 1.** Линейные функции являются линейными отображениями из векторного пространства  $V$  в поле  $F$ , рассматриваемое как векторное пространство над самим собой.

**ПРИМЕР 2.** Поворот есть линейное отображение (и даже изоморфизм) пространства  $V^2$  геометрических векторов в себя.

**ПРИМЕР 3.** Ортогональное проектирование на плоскость определяет линейное отображение (но не изоморфизм) пространства  $V^3$  в пространство геометрических векторов этой плоскости.

**ПРИМЕР 4.** Дифференцирование является линейным отображением пространства непрерывно дифференцируемых функций на заданном промежутке числовой прямой в пространство непрерывных функций на этом промежутке.

Линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  однозначно определяется образами базисных векторов пространства  $V$ . В самом деле, пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  – базис пространства  $V$ . Тогда для любого вектора  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  пространства  $V$  имеем

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i).$$

С другой стороны, если  $w_1, \dots, w_n \in W$  – произвольные векторы, то отображение, определяемое по формуле

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i w_i,$$

как легко видеть, является линейным и  $\varphi(e_i) = w_i$ .

Пусть  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$  – базис пространства  $W$ . Для каждого  $j = \overline{1, n}$  образ  $\varphi(e_j)$  вектора  $e_j \in \mathcal{E}$  принадлежит пространству  $W$ , а значит, его можно разложить по базису  $\mathcal{F}$  этого пространства:

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} f_i.$$

Матрица  $A$  порядка  $m \times n$  с элементами  $a_{i,j}$  называется **матрицей линейного отображения относительно базисов  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$** . Другими словами, столбцы матрицы линейного отображения (в их естественном порядке) – это столбцы координат векторов  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  в базисе  $\mathcal{F}$ .

Для произвольного вектора  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$  из пространства  $V$  разложим его образ  $y = \varphi(x)$  по базису  $\mathcal{F}$  пространства  $W$ :

$$y = \sum_{i=1}^m y_i f_i.$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} y = \varphi(x) &= \varphi\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{i,j} f_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j\right) f_i. \end{aligned}$$

В силу единственности разложения вектора по базису отсюда получаем, что  $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$  для каждого  $i = \overline{1, m}$  или в матричной форме

$$Y = AX, \tag{4}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец координат вектора } x \text{ в базисе } \mathcal{E},$$

а  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$  – столбец координат вектора  $y = \varphi(x)$  в базисе  $\mathcal{F}$ .

ПРИМЕР 5. Найдем матрицу ортогонального проектирования из примера 3. В плоскости проектирования выберем любой базис  $\{e_1, e_2\}$  и дополним его ортогональным вектором  $e_3$  до базиса пространства. Так как при проектировании векторы  $e_1$  и  $e_2$  переходят сами в себя, а вектор  $e_3$  – в нуль, то искомая матрица (относительно выбранных базисов) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, обсудим вопрос об изменении матрицы линейного отображения  $\varphi : V \rightarrow W$  при изменении базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  на базис  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  в пространстве  $V$  и базиса  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$  на базис  $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m\}$  в пространстве  $W$ . Итак, пусть  $\tilde{A}$  – матрица линейного отображения  $\varphi$  относительно базисов  $\tilde{\mathcal{E}}$  и  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Тогда по формуле (4) линейное отображение  $\varphi$  в базисах  $\tilde{\mathcal{E}}$  и  $\tilde{\mathcal{F}}$  запишется так:

$$\tilde{Y} = \tilde{A}\tilde{X}, \quad (5)$$

где  $\tilde{X}$  – столбец координат вектора  $x$  в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$ , а  $\tilde{Y}$  – столбец координат вектора  $y = \varphi(x)$  в базисе  $\tilde{\mathcal{F}}$ .

Если  $T = T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}$  – матрица перехода от  $\mathcal{E}$  к  $\tilde{\mathcal{E}}$ , а  $S = S_{\mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}}$  – матрица перехода от  $\mathcal{F}$  к  $\tilde{\mathcal{F}}$ , то по формуле (1)

$$\begin{aligned} X &= T\tilde{X}, \\ Y &= S\tilde{Y}. \end{aligned}$$

Подставим в формулу (4) вместо  $X$  и  $Y$  их выражение через  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$ :

$$S\tilde{Y} = AT\tilde{X}.$$

Отсюда получаем

$$\tilde{Y} = S^{-1}AT\tilde{X}.$$

Сравнивая полученное выражение с (5), находим, что

$$\tilde{A}\tilde{X} = S^{-1}AT\tilde{X}.$$

Так как это равенство верно для любого  $\tilde{X}$ , в частности, для столбца координат каждого базисного вектора  $\tilde{e}_i$ , то получаем равенство матриц

$$\tilde{A} = S^{-1}AT. \quad (6)$$

Эта формула называется **формулой преобразования матрицы линейного отображения  $\varphi$  при переходе к другим базисам**.

**Лемма 4.1.** При умножении матрицы на невырожденную матрицу ее ранг не изменяется.

*Доказательство леммы.* Пусть  $A$  – произвольная матрица размера  $m \times n$ ,  $C$  – произвольная матрица размера  $n \times k$ . Тогда  $\text{rk } AC \leq \text{rk } A$ . Действительно, из 1-го семестра известно, что ранг матрицы равен рангу ее столбцов, т.е. размерности линейной оболочки ее столбцов. Столбцы матрицы  $AC$  являются линейными комбинациями столбцов матрицы  $A$ , значит, линейная оболочка столбцов матрицы  $AC$  является подпространством в линейной оболочке столбцов матрицы  $A$ . Поэтому из теоремы 1.4 имеем  $\text{rk } AC \leq \text{rk } A$ .

Применяя эту формулу к матрицам  $AC$  и  $C^{-1}$  в случае квадратной невырожденной матрицы  $C$ , имеем  $\text{rk } (AC)C^{-1} \leq \text{rk } AC$ . Следовательно,

$$\text{rk } A = \text{rk } (AC)C^{-1} \leq \text{rk } AC \leq \text{rk } A,$$

что доказывает равенство  $\text{rk } A = \text{rk } AC$ . ■

Из леммы 4.1 и формулы 6 получаем, что ранг матрицы линейного отображения не зависит от выбора базисов.

В отличие от изоморфизма линейное отображение не обязано быть ни сюръективным, ни инъективным. Нарушение этих свойств приводит к возможности связать с каждым линейным отображением два подпространства – его образ и ядро.

**Определение 4.2.** Образом линейного отображения  $\varphi : V \rightarrow W$  называется подмножество

$$\text{Im } \varphi = \{y \in W \mid \exists x \in V, y = \varphi(x)\} \subset W,$$

а ядром – подмножество

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in V \mid \varphi(x) = 0\} \subset V.$$

**Утверждение 4.1.** Образ  $\text{Im } \varphi$  является подпространством в пространстве  $W$ , а ядро  $\text{Ker } \varphi$  является подпространством в  $V$ .

*Доказательство.* Так как  $\varphi(0) = 0$ , то  $\text{Im } \varphi$  и  $\text{Ker } \varphi$  – непустые подмножества. Остается только проверить, что эти подмножества замкнуты относительно операций сложения векторов и умножения вектора на число.

Сначала, проверим замкнутость  $\text{Im } \varphi$  относительно этих операций. Пусть  $y, w$  – произвольные векторы из  $\text{Im } \varphi$ , т.е. найдутся такие  $x, z \in V$ , что  $\varphi(x) = y$ ,  $\varphi(z) = w$ . Так как  $x + z \in V$  и

$$y + w = \varphi(x) + \varphi(z) = \varphi(x + z),$$

то  $y + w \in \text{Im } \varphi$ . Так как для любого  $\lambda \in F$  верно, что  $\lambda x \in V$  и

$$\lambda y = \lambda \varphi(x) = \varphi(\lambda x),$$

то  $\lambda y \in \text{Im } \varphi$ .

Теперь рассмотрим ядро  $\text{Ker } \varphi$ . Если  $x, z$  – произвольные векторы из  $\text{Ker } \varphi$ , то  $\varphi(x) = 0, \varphi(z) = 0$ . Следовательно,

$$\varphi(x + z) = \varphi(x) + \varphi(z) = 0 + 0 = 0$$

и для любого  $\lambda \in F$

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) = \lambda 0 = 0,$$

что означает, что  $x + z, \lambda x \in \text{Ker } \varphi$ . ■

**ПРИМЕР 6.** Ядром отображения проектирования из примера 3 является совокупность векторов, ортогональных плоскости проектирования, а образом – вся плоскость проектирования.

**ПРИМЕР 7.** Ядром отображения дифференцирования из примера 4 является совокупность постоянных функций, а образом – пространство всех непрерывных функций. Последнее следует из существования первообразной у каждой непрерывной функции, доказанного в курсе "Математический анализ".

**Утверждение 4.2.** *Линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  инъективно тогда и только тогда, когда  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ .*

*Доказательство.* Так как  $\varphi(0) = 0$ , то из инъективности  $\varphi$  следует, что  $\varphi(x) \neq 0$  для любого ненулевого вектора  $x$ , т.е.  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ .

Обратно, пусть  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ . Допустим, что  $\varphi$  не инъективно. Тогда существуют различные векторы  $x$  и  $y$  из  $V$  такие, что  $\varphi(x) = \varphi(y)$ . Отсюда в силу линейности отображения  $\varphi$  имеем  $\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) = 0$ . Значит,  $x - y \in \text{Ker } \varphi = \{0\}$ , т.е.  $x - y = 0$ . Это противоречит тому, что  $x$  и  $y$  – различные векторы. ■

**Утверждение 4.3.** *Пусть  $\varphi : V \rightarrow W$  – линейное отображение конечномерного пространства  $V$  и  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  – базис пространства  $V$ . Тогда*

$$\text{Im } \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle. \quad (7)$$

*Кроме того, если  $W$  – также конечномерное векторное пространство,  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$  – его базис, а  $A$  – матрица линейного отображения  $\varphi$  относительно базисов  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$ , то*

$$\dim \text{Im } \varphi = \text{rk } A. \quad (8)$$

*Доказательство.* Для любого

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in V$$

имеем

$$\varphi(x) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n).$$

Следовательно,  $\text{Im } \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ .

Если векторное пространство  $W$  также конечномерно, то определена матрица  $A$  линейного отображения  $\varphi$  относительно базисов  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$ . Столбцы матрицы  $A$  – это координаты векторов  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  в базисе  $\mathcal{F}$ . Так как  $\text{Im } \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ , а ранг матрицы равен рангу ее столбцов, получаем, что  $\dim \text{Im } \varphi = \text{rk } A$ . ■

**Теорема 4.1.** *Для любого линейного отображения  $\varphi : V \rightarrow W$  конечномерного пространства  $V$  верно*

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim V.$$

*Доказательство.* Выберем базис пространства  $V$  специальным образом: сначала выберем базис  $\{e_1, \dots, e_k\}$  подпространства  $\text{Ker } \varphi$ , а затем дополним его какими-нибудь векторами  $e_{k+1}, \dots, e_n$  до базиса пространства  $V$  (теорема 1.3). Так как по построению  $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_k) = 0$ , то из (7) следует, что

$$\text{Im } \varphi = \langle \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \rangle.$$

Докажем, что векторы  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$  линейно независимы, откуда и будет следовать утверждение теоремы.

Пусть

$$\lambda_1 \varphi(e_{k+1}) + \dots + \lambda_{n-k} \varphi(e_n) = 0.$$

Рассмотрим вектор

$$x = \lambda_1 e_{k+1} + \dots + \lambda_{n-k} e_n.$$

Предыдущее равенство означает, что  $\varphi(x) = 0$ , т.е.

$$x \in \text{Ker } \varphi = \langle e_1, \dots, e_k \rangle.$$

Так как  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$  линейно независимы, то это возможно только при  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-k} = 0$ , что и требовалось доказать. ■

Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  – произвольный базис пространства  $V$ ,  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$  – произвольный базис пространства  $W$ , а  $A$  – матрица линейного отображения  $\varphi : V \rightarrow W$  относительно базисов  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$ . образом  $\varphi(x)$  произвольного вектора  $x$  со столбцом координат  $X$  в базисе  $\mathcal{E}$  является вектор, столбец координат которого в базисе  $\mathcal{F}$  является  $AX$ . Поэтому

$$x \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow AX = 0.$$

Следовательно,  $\text{Ker } \varphi$  – это множество векторов, столбцы координат которых в базисе  $\mathcal{E}$  составляют пространство решений однородной системы линейных уравнений с  $n$  неизвестными и матрицей коэффициентов  $A$ . Согласно доказанному в 1-ом семестре утверждению о размерности пространства решений однородной системы линейных уравнений,

$$\dim \text{Ker } \varphi = n - \text{rk } A.$$

Отсюда и из формулу (8), в частности, получаем другое доказательство теоремы 4.1 для конечномерных пространств  $V$  и  $W$ .

## 4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА И ЕГО МАТРИЦЫ.

Перейдем теперь к случаю, когда  $V = W$ .

**Определение 4.3.** *Линейным оператором (или линейным преобразованием) векторного пространства  $V$  над полем  $F$  называется линейное отображение пространства  $V$  в себя.*

Более подробно, линейный оператор – это отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , удовлетворяющее условиям:

- 1)  $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y \quad \forall x, y \in V$ ;
- 2)  $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}x \quad \forall \lambda \in F, \forall x \in V$ .

(Мы будем обозначать линейные операторы рукописными заглавными латинскими буквами, а соответствующие им матрицы – курсивными заглавными буквами.)

В отличие от определения матрицы линейного отображения при определении матрицы линейного оператора принято брать лишь один базис.

**Определение 4.4.** *Матрицей линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  в базисе  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$  называется квадратная матрица  $A = (a_{i,j})$ , определяемая из равенства*

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i.$$

Иначе говоря, в  $j$ -м столбце матрицы  $A$  стоят координаты вектора  $\mathcal{A}e_j$  в базисе  $\mathcal{E}$ .

Как и любое линейное отображение, линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  однозначно определяется образами базисных векторов пространства  $V$ . В самом деле, для любого вектора  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  имеем

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A}e_i.$$

С другой стороны, для любых векторов  $v_1, \dots, v_n \in V$  существует единственный линейный оператор  $\mathcal{A}$ , переводящий базисные векторы  $e_1, \dots, e_n$  в  $v_1, \dots, v_n$  соответственно. Это оператор, переводящий вектор  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  в вектор  $\sum_{i=1}^n x_i v_i$ . Следовательно, линейный оператор однозначно определяется своей матрицей, и любая квадратная матрица порядка  $n$  является матрицей некоторого линейного оператора (в данном базисе).

Как и для линейного отображения, получим явное выражение координат образа  $y = \mathcal{A}x$  вектора  $x \in V$  в базисе  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ . При  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$  имеем

$$y = \mathcal{A}x = \sum_{j=1}^n x_j \mathcal{A}e_j = \sum_{j=1}^n x_j \left( \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right) e_i,$$



где

$$y = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

В силу единственности разложения вектора по базису отсюда получаем, что  $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$  для каждого  $i = \overline{1, n}$  или в матричной форме

$$Y = AX, \quad (9)$$

где

$$A = (a_{i,j}) - \text{матрица линейного оператора } \mathcal{A} \text{ в базисе } \mathcal{E},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \text{столбцы координат векторов } x, y \text{ в базисе } \mathcal{E}.$$

Пусть  $\tilde{\mathcal{E}}$  – еще один базис пространства  $V$ ,  $T = T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}$  – матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}$ ,  $\tilde{A}$  – матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Тогда согласно формуле (6),

$$\tilde{A} = T^{-1}AT. \quad (10)$$

Размерность подпространства  $\text{Im } \mathcal{A}$  называется **рангом** линейного оператора  $\mathcal{A}$  и обозначается  $\text{rk } \mathcal{A}$ . В силу утверждения 4.3 ранг линейного оператора совпадает с рангом матрицы этого оператора (в произвольном базисе). **Определителем**  $\det \mathcal{A}$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  называется определитель матрицы этого оператора в произвольном базисе. Это определение корректно, так как учитывая формулу (10) и свойства определителя, имеем

$$\det \tilde{A} = \det T^{-1}AT = \det T^{-1} \det A \det T = (\det T)^{-1} \det T \det A = \det A.$$

### 4.3. АЛГЕБРА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

На множестве  $\text{End } V$  всех линейных операторов векторного пространства  $V$  над полем  $F$  имеются алгебраические операции: произведение (композиция) линейных операторов

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})v = \mathcal{A}(\mathcal{B}v),$$

сумма линейных операторов

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})v = \mathcal{A}v + \mathcal{B}v$$

и умножение линейного оператора на число  $\lambda$  из  $F$

$$(\lambda\mathcal{A})v = \lambda(\mathcal{A}v).$$

При этом удовлетворяются все аксиомы алгебры, то есть кольца и, в то же время, векторного пространства с аксиомой согласования  $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$ .

Алгебра  $End V$  является ассоциативной и обладает единицей. Единицей этой алгебры является тождественный линейный оператор, который мы будем обозначать буквой  $\mathcal{I}$ .

Как известно из первого семестра, другим примером алгебры является множество  $M_n(F)$  всех квадратных матриц фиксированного произвольного порядка  $n$  с коэффициентами из поля  $F$ . Две алгебры  $\mathfrak{A}$  и  $\tilde{\mathfrak{A}}$  называются изоморфными, если существует изоморфизм колец из первой алгебры во вторую, являющийся одновременно и изоморфизмом векторных пространств. Пишем  $\mathfrak{A} \cong \tilde{\mathfrak{A}}$ .

**Утверждение 4.4.** *Для любого  $n$ -мерного векторного пространства  $V$  над полем  $F$  выполняется*

$$End V \cong M_n(F).$$

*Доказательство.* Зафиксируем базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  в пространстве  $V$ . И рассмотрим отображение  $\Phi : End V \rightarrow M_n(F)$ , сопоставляющее каждому линейному оператору  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  его матрицу  $A$  в базисе  $\mathcal{E}$ .

Так как любой линейный оператор однозначно определяется своей матрицей, и любая квадратная матрица порядка  $n$  является матрицей некоторого линейного оператора (в данном базисе), отображение  $\Phi$  биективно.

Далее пусть  $\Phi(\mathcal{A}) = A = (a_{i,j})$ ,  $\Phi(\mathcal{B}) = (b_{i,j})$ ,  $\Phi(\mathcal{C}) = C = (c_{i,j})$ , где  $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ . Тогда для любого  $k = \overline{1, n}$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}e_k &= (\mathcal{A}\mathcal{B})e_k = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^n b_{j,k}e_j\right) = \sum_{j=1}^n b_{j,k}\mathcal{A}e_j = \\ &= \sum_{j=1}^n b_{j,k}\left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,k}\right)e_i. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\mathcal{C}e_k = \sum_{i=1}^n c_{i,k}e_i.$$

Откуда в силу единственности разложения вектора по базису получаем, что

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,k} \quad \forall i, k = \overline{1, n},$$

что в матричной форме означает

$$C = AB.$$

Таким образом,  $\Phi(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{A})\Phi(\mathcal{B})$ .

Аналогично проверяется, что  $\Phi(\lambda\mathcal{A}) = \lambda\Phi(\mathcal{A})$  и  $\Phi(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{A}) + \Phi(\mathcal{B})$ .

■

**Следствие 4.1.** Для любого конечномерного векторного пространства  $V$  над полем  $F$  выполняется

$$\dim \operatorname{End} V = (\dim V)^2.$$

**Определение 4.5.** Линейный оператор  $\mathcal{B}$  называется **обратным** к линейному оператору  $\mathcal{A}$ , если

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I},$$

где  $\mathcal{I}$  – тождественный оператор.

Оператор, обратный к линейному оператору  $\mathcal{A}$ , обозначается  $\mathcal{A}^{-1}$ .

Не для всякого линейного оператора существует обратный. Например, линейный оператор, проектирующий трехмерное пространство на плоскость, очевидно, не имеет обратного.

С понятием обратного линейного оператора связано понятие обратной матрицы. Матрица  $A^{-1}$  называется обратной к квадратной матрице  $A$ , если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где  $E$  – единичная матрица. Из первого семестра знаем, что квадратная матрица  $A$  имеет обратную тогда и только тогда, когда  $\det A \neq 0$ . Так как при заданном базисе между матрицами и линейными операторами имеется взаимно однозначное соответствие, сохраняющее операцию умножения, то для того, чтобы линейный оператор  $\mathcal{A}$  имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в каком-нибудь базисе имела бы определитель, отличный от нуля, т.е. имела бы ранг  $n$ . Если линейный оператор имеет обратный, то он называется **невырожденным**. В противном случае линейный оператор называется **вырожденным**. Таким образом, в силу равенства (8) получаем, что линейный оператор вырожден тогда и только тогда, когда  $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} < n$ . Также в силу утверждения 4.1 имеем, что линейный оператор вырожден тогда и только тогда, когда  $\operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq \{0\}$ .

Имея в виду возможность совершения над матрицами и линейными операторами всех естественных операций, дадим следующее

**Определение 4.6.** Пусть  $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_m t^m \in F[t]$  – многочлен от переменной  $t$  с коэффициентами из поля  $F$ ,  $\mathcal{A}$  – линейный оператор векторного пространства  $V$ . Тогда  $f(\mathcal{A})$  определяется формулой

$$f(\mathcal{A}) = \alpha_0 \mathcal{I} + \alpha_1 \mathcal{A} + \dots + \alpha_m \mathcal{A}^m,$$

где  $\mathcal{I}$  – тождественный оператор. В случае матрицы  $A \in M_n(F)$  значение многочлена  $f(t)$  от матрицы  $A$  определяется формулой

$$f(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \dots + \alpha_m A^m,$$

где  $E$  – единичная матрица.

ПРИМЕР. Пусть  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ . Тогда

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}, \dots, A^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 \\ 0 & b^m \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что если  $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_m t^m$ , то

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(a) & 0 \\ 0 & f(b) \end{pmatrix}.$$

Аналогичное равенство можно получить для любой диагональной матрицы.

#### 4.4. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА.

Основным вопросом теории линейных операторов является вопрос о возможности приведения матрицы такого оператора к наиболее простому виду. При этом важную роль играет следующее понятие.

**Определение 4.7.** Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  – линейный оператор в векторном пространстве  $V$ . Подпространство  $U \subset V$  называется **инвариантным** относительно оператора  $\mathcal{A}$ , если  $\mathcal{A}u \in U$  для любого вектора  $u \in U$ .

Пишут  $\mathcal{A}U \subset U$ .

Ограничение  $\mathcal{A}|_U$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  на инвариантное подпространство  $U$  является линейным оператором в  $U$ .

Тривиальными инвариантными подпространствами являются подпространство, состоящее лишь из нуля, и все пространство.

Образ  $\text{Im } \mathcal{A}$  и ядро  $\text{Ker } \mathcal{A}$  линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  являются инвариантными подпространствами относительно  $\mathcal{A}$ . Действительно, пусть  $y \in \text{Im } \mathcal{A}$ . Тогда  $\mathcal{A}y \in \text{Im } \mathcal{A}$  в силу определения  $\text{Im } \mathcal{A}$ . Точно так же, если  $x \in \text{Ker } \mathcal{A}$ , то  $\mathcal{A}x = 0 \in \text{Ker } \mathcal{A}$ . Этот простой факт будет использоваться в дальнейшем при приведении произвольного линейного оператора к простейшему виду.

**Утверждение 4.5.** Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$  – базис векторного пространства  $V$  такой, что  $\mathcal{E}_1 = \{e_1, \dots, e_m\}$  – базис инвариантного подпространства  $U \subset V$  относительно линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ . Тогда в базисе  $\mathcal{E}$  матрица для  $\mathcal{A}$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где  $A_1$  – матрица ограничения оператора  $\mathcal{A}$  на  $U$ .

Если, дополнительно,  $W = \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$  – инвариантное подпространство относительно  $\mathcal{A}$ ,  $A_2$  – матрица ограничения оператора  $\mathcal{A}$  на  $W$ , то  $A$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.* Непосредственная проверка: по определению,  $j$ -й столбец матрицы линейного оператора есть набор координат образа  $j$ -го базисного вектора относительно этого же базиса. Остается применить определение инвариантного подпространства. ■

Более общо, если пространство  $V$  разложено в прямую сумму  $k$  инвариантных подпространств  $V_1, \dots, V_k$ , то в базисе пространства  $V$ , составленного из базисов этих подпространств, матрица линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix},$$

где  $A_i$  – матрица ограничения  $\mathcal{A}|_{V_i}$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  на  $V_i$ . В частности, если все  $V_i = \langle e_i \rangle$  одномерны, то матрица  $A$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , составленном из базисов для  $V_1, \dots, V_n$ , является диагональной

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

**Определение 4.8.** *Линейный оператор, матрица которого в некотором базисе диагональна, называется диагонализируемым.*

При этом базисные векторы  $e_1, \dots, e_n$  обладают следующим важным свойством:  $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i, i = \overline{1, n}$ .

## 5. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ.

### 5.1. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН.

Как было уже отмечено, основная задача теории линейных операторов состоит в приведении матрицы линейного оператора к возможно более простому виду за счет выбора подходящего базиса. Для этого полезно знать инвариантные подпространства. Особую роль играют одномерные инвариантные подпространства. Их рассмотрение приводит к понятию собственного вектора.

**Определение 5.1.** Пусть  $V$  – векторное пространство над полем  $F$ . Вектор  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , называется **собственным** для линейного оператора  $A : V \rightarrow V$ , если  $Av = \lambda v$  для подходящего числа  $\lambda \in F$ . При этом  $\lambda$  называется **собственным значением** для  $A$ , отвечающим собственному вектору  $v$ .

Нетрудно проверить, что если  $v$  – собственный вектор, то векторы  $\alpha v$ , где  $\alpha \in F$ , образуют одномерное инвариантное подпространство. Обратно, все отличные от нуля векторы одномерного инвариантного подпространства являются собственными.

В базисе, состоящем из собственных векторов (если таковой существует), матрица оператора диагональна (причем диагональные элементы матрицы – собственные значения). Верно и обратное: если матрица линейного оператора в некотором базисе диагональна, то векторы этого базиса являются собственными для данного оператора.

Таким образом, *линейный оператор  $A : V \rightarrow V$  диагонализируем тогда и только тогда, когда в пространстве  $V$  есть базис из собственных векторов оператора  $A$* . Этим объясняется важность понятия собственного вектора и собственного значения для теории линейных операторов.

**ПРИМЕР 1.** Для оператора дифференцирования в пространстве многочленов единственным с точностью до пропорциональности собственным вектором является многочлен 1 (причем собственное значение равно 0). Таким образом, в этом случае из собственных векторов нельзя составить базис.

**ПРИМЕР 2.** Собственные векторы поворота на угол  $\alpha \neq k\pi$  в трехмерном пространстве – это векторы, лежащие на оси поворота, причем соответствующее им собственное значение равно 1. При  $\alpha = k\pi$  собственными (с собственным значением  $(-1)^k$ ) являются также векторы, ортогональные оси поворота. Таким образом, базис из собственных векторов в этом примере существует только тогда, когда  $\alpha = 0$  или  $\pi$  (если считать, что  $0 \leq \alpha < 2\pi$ ).

Множество собственных значений линейного оператора называется его **спектром**. Для нахождения спектра линейного оператора необходимо ввести понятие характеристического многочлена.

**Определение 5.2.** Пусть дан линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  конечномерного векторного пространства  $V$  над полем  $F$ ,  $\mathcal{E}$  – некоторый базис в  $V$ ,  $A$  – матрица для  $\mathcal{A}$  в  $\mathcal{E}$ . Тогда многочлен степени  $n$  от переменной  $t$  вида

$$\chi_A(t) = \det (A - tE)$$

называется **характеристическим многочленом матрицы  $A$** , а уравнение

$$\chi_A(t) = 0$$

называется **характеристическим уравнением матрицы  $A$** .

**Утверждение 5.1.** Если  $A$  и  $\tilde{A}$  – матрицы линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  в базисах  $\mathcal{E}$  и  $\tilde{\mathcal{E}}$  соответственно, то характеристические многочлены этих матриц совпадают.

*Доказательство.* Если  $T = T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}$  – матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}$ , то учитывая формулу (10), имеем

$$\begin{aligned} \det (\tilde{A} - tE) &= \det (T^{-1}AT - tE) = \det (T^{-1}AT - tT^{-1}ET) = \\ &= \det (T^{-1}(A - tE)T) = (\det T^{-1})\det (A - tE)(\det T) = \det (A - tE), \end{aligned}$$

как и требовалось. ■

**Определение 5.3.** Характеристическим многочленом  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  конечномерного векторного пространства  $V$  над полем  $F$  назовем характеристический многочлен  $\chi_A(t)$  матрицы  $A$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  в некотором базисе, а уравнение

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = 0$$

назовем **характеристическим уравнением линейного оператора  $\mathcal{A}$** .

Таким образом, утверждение 5.1 означает следующее:

**Утверждение 5.2.** Определение характеристического многочлена линейного оператора корректно, то есть не зависит от выбора базиса.

Замечательным следствием этого утверждения является то, что коэффициенты характеристического многочлена линейного оператора не зависят от выбора базиса, т. е. являются инвариантами линейного оператора. Например, коэффициент при  $t^{n-1}$  равен  $(-1)^{n-1}\text{tr } A$ , откуда вытекает, что *след линейного оператора является его инвариантом*.

**Теорема 5.1.** Число  $\lambda \in F$  является собственным для линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  тогда и только тогда, когда  $\lambda$  – корень характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$ . Рассмотрим какой-нибудь базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$ . И пусть  $A$  – матрица для  $\mathcal{A}$  в этом базисе. Тогда  $\det(A - \lambda E) = 0$ , т.е. матрица  $A - \lambda E$  является вырожденной. Из первого семестра известно, что в этом случае однородная система линейных уравнений  $(A - \lambda E)X = 0$  имеет ненулевое решение  $X = (x_1^0, \dots, x_n^0)^t$ . Значит, для ненулевого вектора  $x = x_1^0 e_1 + \dots + x_n^0 e_n$  выполняется  $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})x = 0$  или  $\mathcal{A}x = \lambda x$ , так что  $x$  – собственный вектор для  $\mathcal{A}$  с собственным значением  $\lambda$ . Для доказательства обратного утверждения достаточно прочитать только что написанное в обратном порядке. ■

По основной теореме алгебры комплексных чисел (из первого семестра) каждый многочлен ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет корень, поэтому из теоремы 5.1 получаем

**Следствие 5.1.** *Любой линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над полем комплексных чисел имеет собственный вектор.*

Линейный оператор в вещественном векторном пространстве может не иметь собственных векторов, как показывает пример поворота плоскости на угол  $\alpha \neq 0, \pi$ . Однако использование комплексных чисел позволяет получить полезную информацию и о линейных операторах над полем вещественных чисел. Это достигается с помощью комплексификации.

## 5.2. КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ ВЕЩЕСТВЕННОГО ПРОСТРАНСТВА.

### КОМПЛЕКСНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ВЕЩЕСТВЕННОМ ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Пусть  $V$  – некоторое векторное пространство над полем действительных чисел. Построим из него векторное пространство  $V^{\mathbb{C}}$  над полем комплексных чисел аналогично тому, как из поля  $\mathbb{R}$  строится поле  $\mathbb{C}$ . А именно, элементами пространства  $V^{\mathbb{C}}$  будем считать пары  $(x, y)$ , где  $x, y \in V$ . Определим сложение таких пар и умножение на комплексные числа по правилам

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w),$$

$$(\lambda + i\mu)(x, y) = (\lambda x - \mu y, \mu x + \lambda y).$$

Легко проверить, что при этом получается векторное пространство над полем  $\mathbb{C}$ . Полученное векторное пространство  $V^{\mathbb{C}}$  называется **комплексификацией** пространства  $V$ .

Согласно данному определению, сложение пар вида  $(x, 0)$  и умножение их на вещественное число сводится к соответствующим операциям над их первыми компонентами. отождествим каждую пару вида  $(x, 0)$  с вектором  $x \in V$ ;



тогда пространство  $V$  окажется вложенным в  $V^{\mathbb{C}}$  в виде вещественного подпространства. Так как  $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + i(y, 0)$ , каждый вектор  $(x, y)$  из  $V^{\mathbb{C}}$  однозначно представим в виде

$$(x, y) = x + iy. \quad (11)$$

Любой базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$  (над  $\mathbb{R}$ ) является в то же время базисом пространства  $V^{\mathbb{C}}$  (над  $\mathbb{C}$ ). В самом деле, любой вектор  $x + iy$  из  $V^{\mathbb{C}}$  линейно выражается через  $\{e_1, \dots, e_n\}$  с комплексными коэффициентами:

$$x + iy = (x_1 + iy_1)e_1 + \dots + (x_n + iy_n)e_n,$$

где  $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ ,  $y = y_1e_1 + \dots + y_n e_n \in V$  ( $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ ). Таким образом, система  $\{e_1, \dots, e_n\}$  является порождающей для  $V^{\mathbb{C}}$  (над  $\mathbb{C}$ ). Проверим, что система  $\{e_1, \dots, e_n\}$  является линейно независимой над  $\mathbb{C}$ . Если

$$(\lambda_1 + i\mu_1)e_1 + \dots + (\lambda_n + i\mu_n)e_n = 0, \quad \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R},$$

то

$$(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) + i(\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n) = 0,$$

т.е.

$$(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n) = (0, 0).$$

Значит,  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$  и  $\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n = 0$ . Отсюда в силу линейной независимости системы  $\{e_1, \dots, e_n\}$  над  $\mathbb{R}$  получаем, что все коэффициенты  $\lambda_i, \mu_j$  – нулевые.

Заметим, что хотя любой базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$  (над  $\mathbb{R}$ ) является в то же время базисом пространства  $V^{\mathbb{C}}$  (над  $\mathbb{C}$ ), в пространстве  $V^{\mathbb{C}}$  существуют и другие базисы.

Любой линейный оператор  $\mathcal{A}$  в пространстве  $V$  однозначно продолжается до линейного оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  в пространстве  $V^{\mathbb{C}}$  по формуле:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y.$$

При этом в базисе, составленном из вещественных векторов, оператор  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  имеет такую же матрицу, как и оператор  $\mathcal{A}$ .

Оператор  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  может иметь мнимые собственные значения и соответствующие им мнимые собственные векторы. Какой смысл они имеют в вещественных терминах?

**Утверждение 5.3.** Пусть вектор  $x + iy$  ( $x, y \in V$ ) является собственным вектором оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  с мнимым собственным значением  $\lambda + i\mu$  ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$ ). Тогда  $U = \langle x, y \rangle \subset V$  – двумерное инвариантное подпространство для  $\mathcal{A}$ , причем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x &= \lambda x - \mu y, \\ \mathcal{A}y &= \mu x + \lambda y. \end{aligned} \quad (12)$$

*Доказательство.* Имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) &= (\lambda + i\mu)(x + iy) \\ &\Downarrow \\ \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y &= (\lambda x - \mu y) + i(\mu x + \lambda y) \\ &\Downarrow \\ \begin{cases} \mathcal{A}x &= \lambda x - \mu y, \\ \mathcal{A}y &= \mu x + \lambda y, \end{cases} \end{aligned}$$

т.е.  $U = \langle x, y \rangle$  – инвариантное подпространство для  $\mathcal{A}$ . Докажем, что  $x, y$  – линейно независимые векторы в  $V$ . Действительно, если  $x, y$  линейно зависимы над  $\mathbb{R}$ , то  $x + iy = \gamma z$ , где  $z \in V, \gamma \in \mathbb{C}$  и  $z$  является собственным вектором оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  с тем же собственным значением  $\lambda + i\mu$ , что невозможно при  $\mu \neq 0$ . ■

Равенство (12) означает, что в базисе  $\{x, y\}$  пространства  $U$  оператор  $\mathcal{A}|_U$  имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}.$$

**ПРИМЕР 3.** Оператор  $\mathcal{A}$  поворота евклидовой плоскости на угол  $\alpha$  в ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2\}$  имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Следовательно, вектор  $e_1 + ie_2$  является собственным вектором оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  с собственным значением  $\cos \alpha - i \sin \alpha$ , а вектор  $e_1 - ie_2$  – собственным вектором с собственным значением  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ . Таким образом, в комплексном пространстве матрица поворота может быть приведена к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha - i \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha + i \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

В качестве следствия утверждения 5.3 получается важная

**Теорема 5.2.** *Для любого линейного оператора  $\mathcal{A}$  конечномерного векторного пространства над полем вещественных чисел существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.*

*Доказательство.* Действительно, если характеристический многочлен линейного оператора  $\mathcal{A}$  имеет хотя бы один вещественный корень, то этот оператор имеет хотя бы один собственный вектор, а следовательно, имеет и одномерное инвариантное подпространство (этим вектором порожденное).

Если же среди корней характеристического многочлена нет вещественных, то есть хотя бы один мнимый корень (по основной теореме алгебры комплексных чисел), а следовательно, по утверждению 5.3 оператор  $\mathcal{A}$  имеет двумерное инвариантное подпространство. ■

## 6. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ).

## 6.1. СОБСТВЕННЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА.

Множество  $V_\lambda$  всех собственных векторов линейного оператора  $\mathcal{A}$  с собственным значением  $\lambda$ , объединенных с нулевым вектором, является, очевидно, подпространством в векторном пространстве  $V$ .

**Определение 6.1.** Подпространство  $V_\lambda$  называется **собственным подпространством** оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающим собственному значению  $\lambda$ .

Итак, собственное подпространство  $V_\lambda$  состоит из всех векторов  $x \in V$  (в том числе нулевого вектора) таких, что  $\mathcal{A}x = \lambda x$  или  $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})x = 0$ , т.е.  $V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$ . Размерность собственного пространства  $V_\lambda$  равна  $n - rk(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$ , где  $n = \dim V$ .

**Утверждение 6.1.** Если  $k$  – кратность собственного значения  $\lambda$  линейного оператора  $\mathcal{A}$ , то  $\dim V_\lambda \leq k$ .

*Доказательство.* Допустим,  $\dim V_\lambda = m > k$ . Так как любое собственное подпространство является инвариантным относительно  $\mathcal{A}$ , применим к  $V_\lambda$  утверждение 4.5. Тогда в базисе, в котором первые  $m$  векторов  $\{e_1, \dots, e_m\}$  образуют базис подпространства  $V_\lambda$ , матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где  $A_1$  – матрица ограничения оператора  $\mathcal{A}$  на  $V_\lambda$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_m\}$ . Причем  $A_1$  – квадратная матрица порядка  $m$ , равная  $\lambda E$  в силу того, что все векторы в  $V_\lambda$  и, в частности,  $e_1, \dots, e_m$  – собственные векторы с собственным значением  $\lambda$ . Вычислим характеристический многочлен линейного оператора  $\mathcal{A}$ , используя теорему об определителе с углом нулей из 1-го семестра:

$$\begin{aligned} \det(A - tE) &= \det \begin{pmatrix} A_1 - tE & C \\ 0 & B - tE \end{pmatrix} = \\ &= \det(A_1 - tE) \det(B - tE) = (\lambda - t)^m \det(B - tE). \end{aligned}$$

Отсюда по определению кратности следует, что кратность корня  $\lambda$  не меньше, чем  $m$ , что противоречит предположению о том, что кратность корня  $\lambda$  равна  $k$ . ■

Отметим, что собственному значению кратности  $k$  может отвечать собственное подпространство размерности, меньше, чем  $k$ . Например, линейный оператор в двумерном пространстве, задаваемый матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

имеет единственное собственное значение  $\lambda = 1$ , кратность этого собственного значения равна 2, а размерность отвечающего ему собственного подпространства равна одному. (Проверьте это!)

Важным утверждением о собственных векторах линейного оператора является следующее

**Утверждение 6.2.** Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  – линейный оператор векторного пространства  $V$ ,  $v_1, \dots, v_m$  – собственные векторы с попарно различными собственными значениями  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Тогда  $v_1, \dots, v_m$  линейно независимы.

*Доказательство.* Докажем утверждение индукцией по  $m$ . При  $m = 1$  доказывать нечего. Пусть  $m > 1$ . Если

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

– нетривиальная линейная комбинация, то все ее коэффициенты  $\alpha_i$  отличны от нуля в силу предположения индукции. Применим к обеим частям равенства линейный оператор  $\mathcal{A}$ . Получим

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0.$$

Умножая первое равенство на  $(-\lambda_1)$  и прибавляя ко второму, получим линейную комбинацию векторов  $v_2, \dots, v_m$ :

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1)v_m = 0.$$

Так как по предположению индукции векторы  $v_2, \dots, v_m$  линейно независимы, отсюда следует, что  $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_1) = 0$  для всех  $i = \overline{2, m}$ . Так как все собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  – попарно различные, сокращаем на  $(\lambda_i - \lambda_1)$  и получаем, что  $\alpha_i = 0$  для всех  $i = \overline{2, m}$ , противоречие. ■

**Следствие 6.1.** Сумма собственных подпространств является прямой суммой.

Заметим, что в общем случае сумма всех собственных подпространств, отвечающих всем различным собственным значениям линейного оператора, не обязана совпадать со всем векторным пространством  $V$ .

**Следствие 6.2.** Если характеристический многочлен линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  в  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  имеет  $n$  различных корней, то существует базис из собственных векторов оператора  $\mathcal{A}$ .

*Доказательство.* Каждому корню  $\lambda_i$  характеристического многочлена отвечает хотя бы один собственный вектор. Так как соответствующие этим векторам собственные значения (корни характеристического уравнения) все различны, то согласно утверждению 6.2 мы имеем  $n$  линейно независимых собственных векторов, которые и будут образовывать искомый базис. ■

Условие, указанное в следствии 6.2, не является необходимым для существования базиса из собственных векторов. Так, для тождественного оператора  $\mathcal{I}$  все векторы являются собственными, и, стало быть, любой базис состоит из собственных векторов, однако его характеристический многочлен  $\chi_{\mathcal{I}}(t) = (1 - t)^n$  имеет единственный (но  $n$ -кратный) корень 1.

**Теорема 6.1.** Пусть  $V$  – векторное пространство над полем  $F$  размерности  $n$ . Для существования базиса из собственных векторов линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) характеристический многочлен  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  разлагается на линейные множители;
- 2) размерность каждого собственного подпространства равна кратности соответствующего корня характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  – все различные корни характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  и  $k_1, \dots, k_s$  – их кратности. Для каждого  $i = \overline{1, s}$  через  $V_{\lambda_i}$  обозначим собственное подпространство, отвечающее собственному значению  $\lambda_i$ . В этих обозначениях условие 1) теоремы означает, что  $\sum_{i=1}^s k_i = n$ , а условие 2) означает, что  $\dim V_{\lambda_i} = k_i$  для каждого  $i = \overline{1, s}$ .

Пусть существует базис  $\mathcal{E}$  из собственных векторов линейного оператора  $\mathcal{A}$ . Для каждого  $i = \overline{1, s}$  рассмотрим линейную оболочку  $V_i$  всех векторов из базиса  $\mathcal{E}$ , которые отвечают собственному значению  $\lambda_i$ . Имеем,  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ . Также, очевидно,  $V_i \subset V_{\lambda_i}$ . Учитывая, что сумма собственных подпространств является прямой (Следствие 6.1), получаем, что

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s \subset V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s} \subset V.$$

Таким образом,  $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}$ . По утверждению 6.1  $\dim V_{\lambda_i} \leq k_i$  для каждого  $i = \overline{1, s}$ , и, значит, учитывая, что размерность прямой суммы подпространств равна сумме размерностей слагаемых (Следствие 2.1),

$$n = \dim V = \sum_{i=1}^s \dim V_{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^s k_i \leq n.$$

Что возможно только в случае, когда  $\sum_{i=1}^s k_i = n$  и  $\dim V_{\lambda_i} = k_i$  для всех  $i = \overline{1, s}$ .

Обратно, пусть  $\sum_{i=1}^s k_i = n$  и  $\dim V_{\lambda_i} = k_i$ . Учитывая следствие 6.1 и следствие 2.1, имеем

$$\dim V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s} = \sum_{i=1}^s \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^s k_i = n = \dim V.$$

Следовательно, по теореме 1.4 получаем, что  $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}$ . Значит, объединение базисов из собственных подпространств  $V_{\lambda_i}$ , даст базис для всего пространства  $V$ . Этот базис и будет искомым. ■

## 6.2. ПРИВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ.

### ТЕОРЕМА ГАМИЛЬТОНА-КЭЛИ.

При рассмотрении вопросов о приведении матриц линейных операторов к удобному виду нам придется накладывать ограничение на поле  $F$ , состоящее в алгебраической замкнутости поля.

**Определение 6.2.** *Поле называется алгебраически замкнутым, если всякий многочлен положительной степени над этим полем имеет хотя бы один корень.*

**ПРИМЕР.** Из основной теоремы алгебры комплексных чисел (из первого семестра) следует, что поле комплексных чисел  $\mathbb{C}$  алгебраически замкнуто.

На примере поля действительных чисел видно, что не всякое поле является алгебраически замкнутым. Впрочем, приведем без доказательства следующий факт:

*Каждое поле  $F$  может быть рассмотрено (с точностью до изоморфизма!) как подполе алгебраически замкнутого поля  $K$ .*

Это позволяет любой линейный оператор, действующий в векторном пространстве размерности  $n$  над полем  $F$  рассмотреть как оператор, действующий в векторном пространстве той же размерности над полем  $K$ . Это соображение уже было нами использовано в разделе 5.2, когда линейный оператор  $\mathcal{A}$  в вещественном пространстве  $V$  был продолжен до линейного оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  в комплексном пространстве  $V^{\mathbb{C}}$ , комплексификации пространства  $V$ . При этом в базисе, составленном из вещественных векторов, оператор  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  имел такую же матрицу, как и оператор  $\mathcal{A}$ . Аналогичное имеем и в общем случае. Причем, в силу изоморфизма пространств одной и той же размерности, достаточно рассмотреть вложение векторных пространств  $F^n \subset K^n$ . Если  $\mathcal{A} : F^n \rightarrow F^n$  – линейный оператор,  $A$  – его матрица в базисе из единичных строк, то те же векторы образуют базис и в  $K^n$  и можно продолжить действие линейного оператора  $\mathcal{A}$  до оператора  $\mathcal{A}_K$  на  $K^n$ , считая матрицей нового оператора все ту же матрицу  $A$  в указанном базисе векторного пространства  $K^n$ . Фактически действие обоих операторов на векторах – столбцах состоит в умножении на матрицу  $A$ .

**Теорема 6.2.** *Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  – линейный оператор конечномерного векторного пространства  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$ . Тогда существует базис  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ , в котором матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  является треугольной.*

*Доказательство.* Докажем утверждение теоремы индукцией по  $n = \dim V$ . При  $n = 1$  доказывать нечего. Пусть  $n > 1$ .

Отметим, что согласно формуле (10) на матричном языке утверждение теоремы эквивалентно тому, что для любой квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  над полем  $F$  существует невырожденная матрица  $T$  порядка  $n$  такая, что матрица  $\tilde{A} = T^{-1}AT$  – треугольная.

Рассмотрим характеристический многочлен  $\chi_A(t)$  для  $A$ . В силу алгебраической замкнутости поля  $F$  у него есть корень  $\lambda$ . По теореме 5.1 это означает, что у линейного оператора  $A$  есть собственный вектор  $e_1$  с собственным значением  $\lambda$ . Так как  $e_1$  – ненулевой вектор, к нему можно применить теорему 1.3 и дополнить  $e_1$  векторами  $e_2, \dots, e_n$  до базиса  $\mathcal{E}$  в  $V$ . Так как  $U = \langle e_1 \rangle$  является одномерным инвариантным подпространством, по утверждению 4.5 матрица  $A$  линейного оператора  $A$  в базисе  $\mathcal{E}$  будет состоять из четырех блоков:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & u \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где  $u$  – строка длины  $n - 1$ ,  $B$  – квадратная матрица порядка  $n - 1$ .

По предположению индукции найдется невырожденная матрица  $S$  порядка  $n - 1$  такая, что  $D = S^{-1}BS$  – треугольная матрица. Построим квадратную матрицу  $T$  порядка  $n$  из четырех блоков

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

с разбиением таким же, как и для  $A$ . Полученная матрица  $T$  – невырожденная, так как по теореме об определителе матрицы с углом нулей, доказанной в первом семестре,  $\det T = \det S \neq 0$ . Причем, используя правило сокращенного умножения блочных матриц, имеем

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix}$$

и далее

$$\begin{aligned} \tilde{A} = T^{-1}AT &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & u \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & u \\ 0 & S^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & uS \\ 0 & S^{-1}BS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & uS \\ 0 & D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Очевидно, что полученная матрица  $\tilde{A}$  – треугольная. Теорема доказана в силу сделанного замечания о матрицах. Отметим, что при этом матрица  $T$  – матрица перехода из базиса  $\mathcal{E}$  к искомому базису  $\mathcal{F}$ . ■

Заметим, что если поле не алгебраически замкнуто, то базиса, в котором матрица линейного оператора является треугольной, может и не быть, так как он предполагает наличие хотя бы одного собственного вектора. В качестве



примера можно опять рассмотреть поворот евклидовой плоскости на угол  $\alpha \neq 0, \pi$ .

Также заметим, что у одного и того же линейного оператора может быть много треугольных видов:

**ПРИМЕР.** Рассмотрим трехмерное пространство  $V$  и базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$  в этом пространстве. Зададим линейный оператор по правилу

$$\mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1e_1.$$

Тогда в базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  этот линейный оператор имеет одну треугольную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в базисе  $\{e_1, e_1 + e_2, e_3\}$  – другую треугольную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а в базисе  $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_3\}$  – треугольную матрицу третьего вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**ЗАДАЧА.** Используя теорему 5.2, докажите, что над полем  $\mathbb{R}$  любой линейный оператор приводим к блочно-треугольному виду, причем блоки имеют порядок не выше двух.

Одним из замечательных следствий теоремы 6.2 является следующая весьма важная теорема Гамильтона - Кэли.

**Следствие 6.3. (Теорема Гамильтона - Кэли)** *Всякий линейный оператор  $\mathcal{A}$  в конечномерном векторном пространстве  $V$  является корнем своего характеристического многочлена. Иными словами,*

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0.$$

*Доказательство.* Прежде всего отметим, что из доказательства утверждения 4.4 следует, что если  $f(t)$  – произвольный многочлен с коэффициентами из  $F$ , то для матрицы  $A$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  в произвольном базисе выполняется

$$f(\mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow f(A) = 0.$$

1 случай. Пусть  $\mathcal{A}$  – линейный оператор в векторном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$ . Как мы знаем (см. утверждение 5.2), характеристический многочлен не зависит от выбора базиса, так что в силу

теоремы 6.2 мы имеем право выбрать базис  $\mathcal{F}$ , в котором матрица для  $\mathcal{A}$  имеет треугольный вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

В силу сделанного выше замечания достаточно доказать, что  $\chi_{\mathcal{A}}(\tilde{A}) = 0$ . Вычислим характеристический многочлен в базисе  $\mathcal{F}$ :

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\tilde{A} - tE) = (a_{1,1} - t)(a_{2,2} - t) \cdots (a_{n,n} - t).$$

Таким образом, требуется доказать, что

$$(a_{1,1}E - \tilde{A})(a_{2,2}E - \tilde{A}) \cdots (a_{n,n}E - \tilde{A}) = 0.$$

Это можно сделать индукцией по  $n$ . Разобьем матрицу  $\tilde{A}$  на четыре блока:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & u \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где  $u$  – строка длины  $n - 1$ , а  $B$  – треугольная матрица порядка  $n - 1$ :

$$B = \begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

По предположению индукции имеем

$$(a_{2,2}E - B) \cdots (a_{n,n}E - B) = 0.$$

Используя правило сокращенного умножения блочных матриц, получаем

$$\begin{aligned} & (a_{2,2}E - \tilde{A}) \cdots (a_{n,n}E - \tilde{A}) = \\ & = \left( \begin{pmatrix} a_{2,2} & 0 \\ 0 & a_{2,2}E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1,1} & u \\ 0 & B \end{pmatrix} \right) \cdots \left( \begin{pmatrix} a_{n,n} & 0 \\ 0 & a_{n,n}E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1,1} & u \\ 0 & B \end{pmatrix} \right) = \\ & = \begin{pmatrix} a_{2,2} - a_{1,1} & -u \\ 0 & a_{2,2}E - B \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n,n} - a_{1,1} & -u \\ 0 & a_{n,n}E - B \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} (a_{2,2} - a_{1,1}) \cdots (a_{n,n} - a_{1,1}) & \tilde{u} \\ 0 & (a_{2,2}E - B) \cdots (a_{n,n}E - B) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} (a_{2,2} - a_{1,1}) \cdots (a_{n,n} - a_{1,1}) & \tilde{u} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{u}$  – некоторая новая строка длины  $n - 1$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} & (a_{1,1}E - \tilde{A})(a_{2,2}E - \tilde{A}) \cdots (a_{n,n}E - \tilde{A}) = \\ & = \left( \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{1,1}E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1,1} & u \\ 0 & B \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} (a_{2,2} - a_{1,1}) \cdots (a_{n,n} - a_{1,1}) & \tilde{u} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -u \\ 0 & a_{1,1}E - B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (a_{2,2} - a_{1,1}) \dots (a_{n,n} - a_{1,1}) & \tilde{u} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

как и требовалось.

2 случай. Пусть  $\mathcal{A}$  – линейный оператор в векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $F$ , а  $A$  – матрица этого линейного оператора в некотором базисе  $\mathcal{E}$ . Как было отмечено в начале этого раздела, поле  $F$  можно рассматривать как подполе алгебраически замкнутого поля  $K$ , и можно продолжить действие линейного оператора  $\mathcal{A}$  до оператора  $\mathcal{A}_K$  в векторном пространстве  $V_K$  над полем  $K$ , считая матрицей нового оператора все ту же матрицу  $A$  в базисе  $\mathcal{E}$ , рассматриваемого уже как базис векторного пространства  $V_K$ . В силу только что доказанного для алгебраически замкнутого поля, мы можем утверждать, что матрица  $A$  – корень характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}_K}(t) = \det(A - tE)$ , который, очевидно, не зависит от того, рассматриваем ли мы матрицу  $A$  как матрицу с элементами из  $F$  или как матрицу с элементами из  $K$ , и равен  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ . ■

Пользуясь теоремой Гамильтона-Кэли, можно свести вычисление любого многочлена  $f \in F[t]$  от линейного оператора  $\mathcal{A}$  к вычислению многочлена степени меньше  $n = \dim V$  от этого оператора. Действительно, разделим  $f$  на  $\chi_{\mathcal{A}}$  с остатком:

$$f(t) = \chi_{\mathcal{A}}(t)q(t) + r(t), \quad \deg r(t) < n.$$

Тогда

$$f(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}).$$

## 7. ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА (НАЧАЛО).

### 7.1. МИНИМАЛЬНЫЙ МНОГОЧЛЕН.

Пусть дан линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  конечномерного векторного пространства  $V$ .

**Определение 7.1.** *Многочлен  $f(t) \in F[t]$  называется аннулирующим многочленом для линейного оператора  $\mathcal{A}$ , если  $f(\mathcal{A}) = 0$ . Аналогично определяется аннулирующий многочлен для матрицы.*

По теореме Гамильтона-Кэли любой оператор  $\mathcal{A}$  и соответствующая ему матрица  $A$  (в любом базисе) аннулируется своим характеристическим многочленом.

**Определение 7.2.** *Аннулирующий многочлен для линейного оператора  $\mathcal{A}$  (соотв., для матрицы  $A$ ) наименьшей степени со старшим коэффициентом 1 называется минимальным многочленом для оператора  $\mathcal{A}$  (соотв., для матрицы  $A$ ) и обозначается  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$  (соотв.,  $\mu_A(t)$ ).*

Согласно теореме Гамильтона - Кэли,  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$ . Это означает, что степень минимального многочлена не превосходит  $n = \dim V$ . При этом, возможен разброс степени от 1 до  $n$ .

**ПРИМЕР 1.** Если  $\mathcal{I}$  - тождественный оператор в произвольном  $n$ -мерном пространстве, то  $\mu_{\mathcal{I}}(t) = t - 1$ , т.е.  $\deg \mu_{\mathcal{I}} = 1$ .

**ПРИМЕР 2.** Если  $\mathcal{A}$  - поворот евклидовой плоскости  $V^2$  на  $\pi/2$ , то  $\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^2 + 1$ , т.е.  $\deg \mu_{\mathcal{A}} = 2 = \dim V^2$ .

Простейшие свойства минимального многочлена описаны в следующей лемме.

**Лемма 7.1.** *Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  - линейный оператор конечномерного векторного пространства  $V$ . Тогда*

- 1) *минимальный многочлен линейного оператора равен минимальному многочлену его матрицы в любом базисе;*
- 2) *минимальный многочлен является делителем любого аннулирующего многочлена;*
- 3) *минимальный многочлен обладает свойством единственности;*
- 4) *наборы корней у минимального многочлена и характеристического многочлена совпадают.*

*Доказательство.*

1) Из доказательства утверждения 4.4 следует, что если  $f(t)$  - произвольный многочлен с коэффициентами из  $F$ , то для матрицы  $A$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  в произвольном базисе выполняется

$$f(\mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow f(A) = 0.$$

Откуда и получаем первое утверждение.

2) Второе утверждение вытекает из алгоритма деления с остатком. Пусть  $f(t)$  – произвольный аннулирующий многочлен для  $\mathcal{A}$ . Поделим многочлен  $f(t)$  на минимальный многочлен  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  с остатком:

$$f(t) = \mu_{\mathcal{A}}(t)q(t) + r(t),$$

при этом для остатка  $r(t)$  должно выполняться  $\deg r(t) < \deg \mu_{\mathcal{A}}(t)$ . Подставляя  $\mathcal{A}$  вместо  $t$ , получаем

$$r(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) - \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = 0 - 0q(\mathcal{A}) = 0,$$

т.е.  $r(t)$  – аннулирующий для  $\mathcal{A}$ . В силу минимальности степени многочлена  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ , получаем, что  $r(t) \equiv 0$ , т.е. деление происходит нацело.

3) Третье утверждение справедливо, так как любой из двух минимальных многочленов линейного оператора делит другой, а их старшие коэффициенты совпадают.

4) Так как характеристический многочлен  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  является его аннулирующим многочленом, из второго утверждения получаем, что минимальный многочлен  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$  делит  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ . Значит, корни минимального многочлена являются корнями характеристического многочлена. Обратно, пусть  $\lambda$  – корень характеристического многочлена. Тогда у  $\mathcal{A}$  есть собственный вектор  $v$  с собственным значением  $\lambda$ . Применим к вектору  $v$  оператор  $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ . С одной стороны, расписав минимальный многочлен явно:

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^k + b_{k-1}t^{k-1} + \dots + b_1t + b_0$$

и подставив линейный оператор  $\mathcal{A}$  вместо переменной  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})v &= (\mathcal{A}^k + b_{k-1}\mathcal{A}^{k-1} + \dots + b_1\mathcal{A} + b_0\mathcal{I})v = \\ &= \mathcal{A}^k v + b_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}v + \dots + b_1\mathcal{A}v + b_0\mathcal{I}v = \\ &= \lambda^k v + b_{k-1}\lambda^{k-1}v + \dots + b_1\lambda v + b_0v = \\ &= (\lambda^k + b_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + b_1\lambda + b_0)v = \mu_{\mathcal{A}}(\lambda)v. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как  $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$ , имеем

$$\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})v = 0v = 0.$$

Откуда

$$\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)v = 0.$$

Так как  $v \neq 0$ , то число  $\mu_{\mathcal{A}}(\lambda)$  равно нулю, т.е.  $\lambda$  – корень минимального многочлена, что и требовалось доказать. ■

В качестве примера применение минимального многочлена сформулируем утверждение, которое будет доказано в разделе 8:

*Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  конечномерного векторного пространства  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$  диагонализировать тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен не имеет кратных корней.*

Напомним, что линейный оператор  $\mathcal{A}$  называется диагонализируемым, если в некотором базисе его матрица диагональна. Существование базиса из собственных векторов эквивалентно диагонализируемости.

## 7.2. ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ.

При исследовании линейного оператора, действующего в  $n$ -мерном векторном пространстве над полем  $F$ , желательно выбрать базис так, чтобы матрица линейного оператора имела наиболее простой вид. Если линейный оператор имеет базис из собственных векторов, то его матрица в этом базисе является диагональной. В частности, это верно в случае, когда все корни характеристического уравнения линейного оператора принадлежат полю  $F$  и различны (см. следствие 6.2).

Однако число линейно независимых собственных векторов у линейного оператора может быть меньше, чем  $n$ . Такой оператор заведомо не может иметь диагональную матрицу ни в каком базисе. Возникает вопрос: каков простейший вид матрицы такого линейного оператора?

При рассмотрении этого вопроса нам придется накладывать ограничение на поле  $F$ , состоящее в алгебраической замкнутости поля. При таком ограничении на поле для произвольного линейного оператора в этой главе мы укажем базис, в котором матрица оператора имеет сравнительно простой вид (так называемую жорданову нормальную форму). В случае, когда число линейно независимых собственных векторов оператора равно размерности пространства, эта нормальная форма совпадает с диагональной.

**Определение 7.3.** *Квадратная матрица  $J_k(\lambda)$  порядка  $k$  вида*

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

называется **жордановой клеткой** порядка  $k$  с собственным значением  $\lambda$  на диагонали. У этой матрицы все диагональные элементы равны  $\lambda$ , над главной диагональю параллельно ей расположен один ряд из единиц, а все остальные элементы равны нулю. В случае  $k = 1$  рассматриваемая матрица сводится к единственному числу  $\lambda$ .

**Определение 7.4.** Блочно - диагональная матрица  $J$  вида

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где  $J_{k_i}(\lambda_i)$  – жордановы клетки, называется **жордановой матрицей**.

**Определение 7.5.** Базис векторного пространства  $V$ , в котором матрица  $J$  для линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  является жордановой, называется **жордановым базисом**. При этом матрица  $J$  называется **жордановой нормальной формой** линейного оператора  $\mathcal{A}$ .

Если матрица линейного оператора в некотором жордановом базисе  $\mathcal{E}$  имеет вид (13), то  $\mathcal{E} = \{e_{1,1}, \dots, e_{1,k_1}; \dots; e_{s,1}, \dots, e_{s,k_s}\}$ , где для каждого  $i = 1, \dots, s$  подсистема  $\{e_{i,1}, \dots, e_{i,k_i}\}$  соответствует столбцам матрицы, которые образуют жорданову клетку  $J_{k_i}(\lambda_i)$ . Будем называть систему  $\{e_{i,1}, \dots, e_{i,k_i}\}$  **жордановым базисом** для клетки  $J_{k_i}(\lambda_i)$ .

**Утверждение 7.1.** Пусть  $V$  –  $n$ -мерное векторное пространство,  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  – линейный оператор в  $V$ , для которого существует жорданов базис, а  $J$  – (жорданова) матрица в этом базисе. Тогда жорданов базис для  $J$  является объединением жордановых базисов для жордановых клеток, а для одной клетки  $J_k(\lambda)$  он имеет вид  $\{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k\}$ , где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(e_1) &= \lambda e_1, \\ \mathcal{A}(e_2) &= \lambda e_2 + e_1, \\ &\dots \\ \mathcal{A}(e_{k-1}) &= \lambda e_{k-1} + e_{k-2}, \\ \mathcal{A}(e_k) &= \lambda e_k + e_{k-1}. \end{aligned}$$

В частности, если  $\lambda = 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(e_1) &= 0, \\ \mathcal{A}(e_2) &= e_1, \\ &\dots \\ \mathcal{A}(e_{k-1}) &= e_{k-2}, \\ \mathcal{A}(e_k) &= e_{k-1}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Следует из того, что по определению матрицы линейного оператора в некотором базисе столбцами этой матрицы являются столбцы координат образов базисных векторов при действии линейного оператора. ■

**Утверждение 7.2.** Для произвольной жордановой клетки порядка  $k$  с  $\lambda$  на диагонали

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

и произвольной жордановой матрицы порядка  $n$

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

где  $J_{k_i}(\lambda_i)$  – жордановы клетки, верно следующее

1) характеристический многочлен  $\chi_J(t)$  жордановой матрицы  $J$  равен  $(-1)^n(t - \lambda_1)^{k_1}(t - \lambda_2)^{k_2} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$ ;

2) минимальный многочлен  $\mu_{J_k(\lambda)}(t)$  жордановой клетки  $J_k(\lambda)$  равен  $(t - \lambda)^k$ ;

3) минимальный многочлен  $\mu_J(t)$  жордановой матрицы  $J$  равен

$$\text{НОК} (\mu_{J_{k_1}(\lambda_1)}(t), \dots, \mu_{J_{k_s}(\lambda_s)}(t)).$$

*Доказательство.*

1) Сначала посчитаем характеристический многочлен от жордановой клетки. По правилу вычисления определителя от верхней треугольной матрицы имеем:

$$\begin{aligned} \chi_{J_k(\lambda)}(t) &= \det (J_k(\lambda) - tE) = \det \begin{pmatrix} \lambda - t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - t \end{pmatrix} = \\ &= (\lambda - t)^k = (-1)^k(t - \lambda)^k. \end{aligned}$$

В силу теоремы об определителе матрицы с углом нулей характеристический многочлен от жордановой матрицы представляется в виде произведения характеристических многочленов от жордановых клеток:

$$\begin{aligned} \chi_J(t) &= \det (J - tE) = \det \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) - tE & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) - tE & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) - tE \end{pmatrix} = \\ &= \det (J_{k_1}(\lambda_1) - tE) \det (J_{k_2}(\lambda_2) - tE) \dots \det (J_{k_s}(\lambda_s) - tE) = \\ &= [(-1)^{k_1}(t - \lambda_1)^{k_1}] [(-1)^{k_2}(t - \lambda_2)^{k_2}] \dots [(-1)^{k_s}(t - \lambda_s)^{k_s}] = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= (-1)^{k_1+\dots+k_s}(t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2}\dots(t-\lambda_s)^{k_s} = \\
&= (-1)^n(t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2}\dots(t-\lambda_s)^{k_s}.
\end{aligned}$$

2) Так как характеристический многочлен  $\chi_{J_k(\lambda)}(t)$  от жордановой клетки  $J_k(\lambda)$  равен  $(-1)^k(t-\lambda)^k$ , а минимальный многочлен делит характеристический (по теореме Гамильтона-Кэли и лемме 7.1 п. 3), получаем, что  $\mu_{J_k(\lambda)}(t) = (t-\lambda)^l$  для некоторого  $l \leq k$ . Осталось найти наименьшее натуральное  $l$ , при котором  $(J_k(\lambda) - \lambda E)^l = 0$ .

Рассмотрим, что происходит с матрицей  $J_k(\lambda) - \lambda E = J_k(0)$  при возведении ее в степени.

ПРИМЕР для  $k = 4$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно понять, что в общем случае (для произвольного  $k$ ) при возведении жордановой клетки  $J_k(0)$  в степени мы будем иметь аналогичную ситуацию: при каждом последующем возведении ряд единиц, параллельный главной диагонали, смещается на один ряд в сторону правого верхнего угла матрицы. При  $m < k$  в жордановой клетке  $J_k(0)^m$  будет  $m$  нулевых строк и  $(k-m)$  ненулевых ступенек. Когда же  $m$  станет равно  $k$ , жорданова клетка станет равной нулю. Таким образом, наименьшее  $l$ , при котором  $(J_k(\lambda) - \lambda E)^l = 0$ , равно  $k$ . Поэтому  $\mu_{J_k(\lambda)}(t) = (t-\lambda)^k$ .

3) Далее рассмотрим жорданову матрицу  $J$ . Из свойств сокращенного умножения блочных матриц получаем, что

$$\mu_J(J) = \mu_J \left( \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_J(J_{k_1}(\lambda_1)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_J(J_{k_2}(\lambda_2)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_J(J_{k_s}(\lambda_s)) \end{pmatrix}.$$

Поэтому  $\mu_J(J) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mu_J(J_{k_i}(\lambda_i)) = 0$  для каждого  $i = \overline{1, s}$ . Учитывая лемму 7.1 п. 3, получаем, что  $\mu_J$  – это многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом, равным 1, который делится нацело на  $\mu_{J_{k_i}(\lambda_i)}$  для каждого  $i = \overline{1, s}$ . Это означает, что

$$\mu_J(t) = \text{НОК} (\mu_{J_{k_1}(\lambda_1)}(t), \dots, \mu_{J_{k_s}(\lambda_s)}(t)).$$

■

**Утверждение 7.3.** Пусть  $V$  –  $n$ -мерное векторное пространство,  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  – линейный оператор в  $V$ , для которого существует жорданов базис, а  $J$  – (жорданова) матрица в этом базисе. И пусть  $V_\mu$  – собственное подпространство для линейного оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающее собственному значению  $\mu$ . Тогда  $\dim V_\mu$  равна числу жордановых клеток в матрице  $J$  с  $\mu$  на диагонали.

*Доказательство.* Размерность собственного подпространства  $V_\mu$  совпадает с размерностью пространства решений системы  $(J - \mu E)X = 0$ , которая равняется  $n - \text{rk} (J - \mu E)$ . В обозначениях (13) имеем,  $J - \mu E$  – блочно-диагональная матрица с  $s$  блоками вида

$$J_{k_i}(\lambda_i) - \mu E = \begin{pmatrix} \lambda_i - \mu & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i - \mu & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i - \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i - \mu \end{pmatrix}.$$

Поэтому  $\text{rk} (J - \mu E) = \sum_{i=1}^s \text{rk} (J_{k_i}(\lambda_i) - \mu E)$ , где

$$\text{rk} (J_{k_i}(\lambda_i) - \mu E) = \begin{cases} k_i, & \text{если } \lambda_i \neq \mu, \\ k_i - 1, & \text{если } \lambda_i = \mu. \end{cases}$$

Так как  $n = \sum_{i=1}^s k_i$ , то  $n - \text{rk} (J - \mu E) = \sum_{i=1}^s (k_i - \text{rk} (J_{k_i}(\lambda_i) - \mu E))$ , где

$$k_i - \text{rk} (J_{k_i}(\lambda_i) - \mu E) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda_i \neq \mu, \\ 1, & \text{если } \lambda_i = \mu. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что  $n - \text{rk} (J - \mu E)$  равно числу жордановых клеток в матрице  $J$  с  $\mu$  на диагонали. ■

## 8. ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА (ПРОДОЛЖЕНИЕ).

## 8.1. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЖОРДАНОВА БАЗИСА.

**Теорема 8.1.** Пусть  $F$  – алгебраически замкнутое поле,  $V$  – конечномерное векторное пространство над  $F$ ,  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  – линейный оператор в  $V$ . Тогда в  $V$  имеется жорданов базис для  $\mathcal{A}$ .

*Доказательство.* Будем доказывать теорему индукцией по  $n = \dim V$  с очевидным основанием при  $n = 1$ .

Прежде всего заметим, что если к жордановой матрице (13) прибавить произвольную скалярную матрицу  $\alpha E$ , где  $\alpha \in F$ , то она, очевидно, останется жордановой. Поэтому если найдется жорданов базис для оператора  $\mathcal{A}$ , то этот же базис будет являться жордановым и для оператора  $\mathcal{A} + \alpha \mathcal{I}$ .

Это замечание позволяют считать в ходе доказательства шага индукции, что мы имеем дело с вырожденным линейным оператором  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ . Если это не так, можно заменить  $\mathcal{A}$  на  $\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}$ , где  $\lambda$  – любое собственное значение линейного оператора  $\mathcal{A}$ , которое существует в силу алгебраической замкнутости поля  $F$ .

Рассмотрим образ  $\text{Im } \mathcal{A}$  и ядро  $\text{Ker } \mathcal{A}$  линейного оператора  $\mathcal{A}$ . Поскольку  $\mathcal{A}$  – вырожденный,  $\text{Ker } \mathcal{A} \neq \{0\}$ . Если  $\text{Ker } \mathcal{A} = V$ , то наличие жорданова базиса очевидно: любой базис жорданов и жорданова форма оператора равна нулевой матрице. Далее считаем, что  $\text{Ker } \mathcal{A} \neq V$ , т.е.  $0 < \dim \text{Ker } \mathcal{A} < n$ . Из утверждения 4.1 получаем, что  $0 < \dim \text{Im } \mathcal{A} < n$ .

Так как ядро и образ инвариантны относительно действия оператора  $\mathcal{A}$ , мы можем рассмотреть ограничение действия оператора  $\mathcal{A}$  на подпространства  $\text{Im } \mathcal{A}$  и  $\text{Ker } \mathcal{A}$ . В подпространстве  $\text{Ker } \mathcal{A}$  все векторы – собственные, отвечающие собственному значению нуль, поэтому любой базис в  $\text{Ker } \mathcal{A}$  является жордановым, и в этом базисе матрица для ограничения  $\mathcal{A}|_{\text{Ker } \mathcal{A}}$  оператора  $\mathcal{A}$  на  $\text{Ker } \mathcal{A}$  – нулевая. По предположению индукции в подпространстве  $\text{Im } \mathcal{A}$  тоже есть жорданов базис для ограничения  $\mathcal{A}|_{\text{Im } \mathcal{A}}$  оператора  $\mathcal{A}$  на  $\text{Im } \mathcal{A}$ .

Как уже упоминалось (утверждение 7.1), жорданов базис для линейного оператора является объединением жордановых базисов для клеток. Запишем жорданов базис для  $\mathcal{A}|_{\text{Im } \mathcal{A}}$ , начиная с  $s$  клеток с собственным значением 0:

$$\mathcal{E} = \{e_{1,1}, \dots, e_{1,k_1};$$

$$\dots$$

$$e_{s,1}, \dots, e_{s,k_s};$$

$$e_{s+1,1}, \dots, e_{s+1,k_{s+1}};$$

$$\dots$$

$$e_{m,1}, \dots, e_{m,k_m}\}.$$



Докажем, что система векторов

$$\mathcal{H} = \{f_1; \dots; f_q; e_{1,1}, \dots, e_{1,k_1}, g_1; \dots; e_{s,1}, \dots, e_{s,k_s}, g_s; e_{s+1,1}, \dots, e_{s+1,k_{s+1}}; \dots; e_{m,1}, \dots, e_{m,k_m}\}$$

является жордановым базисом для действия линейного оператора  $\mathcal{A}$  на всем пространстве  $V$ .

Сначала, докажем, что  $\mathcal{H}$  – линейно независимая система. Заметим, что, исключив  $g_1, \dots, g_s$ , мы остаемся с базисом  $\mathcal{E} \sqcup \mathcal{F}$  пространства  $\text{Im } \mathcal{A} + \text{Ker } \mathcal{A}$ , построенным именно так, как это делалось при доказательстве формулы Грассмана (теорема 2.1). Значит, система  $\mathcal{E} \sqcup \mathcal{F}$  линейно независима. Поэтому в любой нетривиальной линейной комбинации векторов из  $\mathcal{H}$  векторы  $g_1, g_2, \dots, g_s$  входят с коэффициентами, среди которых хотя бы один не равен нулю. Итак, допустим,

$$\sum_{j=1}^q \alpha_j f_j + \sum_{i \leq s} \beta_i g_i + \sum_{i \leq s} \left( \sum_{j=1}^{k_i} \gamma_{i,j} e_{i,j} \right) + \sum_{i \geq s+1} \left( \sum_{j=1}^{k_i} \gamma_{i,j} e_{i,j} \right) = 0,$$

причем не все коэффициенты  $\beta_i$  равны нулю. Применим к этой линейной комбинации линейный оператор  $\mathcal{A}$ :

$$\sum_{j=1}^q \alpha_j 0 + \sum_{i \leq s} \beta_i e_{i,k_i} + \sum_{i \leq s} \left( \sum_{j=1}^{k_i-1} \gamma_{i,j+1} e_{i,j} \right) + \sum_{i \geq s+1} \left( \lambda_i e_{i,1} + \sum_{j=2}^{k_i} \gamma_{i,j} (\lambda_i e_{i,j} + e_{i,j-1}) \right) = 0$$

и получим равную нулю нетривиальную линейную комбинацию векторов базиса  $\mathcal{E} \sqcup \mathcal{F}$  пространства  $\text{Im } \mathcal{A} + \text{Ker } \mathcal{A}$ . Это противоречие доказывает линейную независимость системы  $\mathcal{H}$ .

Выше было показано, что количество векторов в системе  $\mathcal{H}$  равно размерности пространства  $V$ . Значит, эта линейно независимая система векторов образует базис в  $V$ .

Осталось доказать, что этот базис является жордановым. Действительно, чтобы получить базис  $\mathcal{H}$  к базису  $\mathcal{E}$  пространства  $\text{Im } \mathcal{A}$  были добавлены  $q$  векторов  $f_1, \dots, f_q$  ядра, т.е. таких, что

$$\mathcal{A}f_i = 0,$$

и  $s$  векторов  $g_1, \dots, g_s$ , удовлетворяющих условию (14), которое согласно утверждению 7.1 говорит о том, что система  $\{e_{i,1}, \dots, e_{i,k_i}, g_i\}$  соответствует

жордановой клетке порядка  $k_i+1$  с 0 на диагонали. Поэтому  $\mathcal{H}$  есть объединение жордановых базисов жордановых клеток: если к матрице  $J_{\text{Im } \mathcal{A}}$  добавить  $q$  клеток размера 1 с нулем на диагонали и увеличить на 1 размер всех имевшихся в  $J_{\text{Im } \mathcal{A}}$  клеток с 0 на диагонали, то получится (жорданова) матрица оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $\mathcal{H}$ . ■

## 8.2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЖОРДАНОВОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ.

Для доказательства единственности жордановой нормальной формы линейного оператора нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 8.1.** *Пусть*

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

– жорданова клетка порядка  $k$  с собственным значением  $\lambda$  на диагонали. Тогда

$$\text{rk} (J_k(\lambda) - \alpha E)^m = \begin{cases} k, & \text{при } \lambda \neq \alpha, \quad \forall m, \\ k - m, & \text{при } \lambda = \alpha, \quad m < k, \\ 0, & \text{при } \lambda = \alpha, \quad m \geq k; \end{cases}$$

*Доказательство.* При  $\lambda \neq \alpha$  матрица  $J_k(\lambda) - \alpha E$  является невырожденной, каковой она останется и при возведении в произвольную степень. Поэтому ранг матрицы  $(J_k(\lambda) - \alpha E)^m$  будет равняться ее порядку.

Пусть теперь  $\lambda = \alpha$ . При этом  $J_k(\lambda) - \lambda E = J_k(0)$ . Мы видели (смотри доказательство утверждения 7.2), что происходит при возведении жордановой клетки  $J_k(0)$  в степени: при каждом последующем возведении ряд единиц, параллельный главной диагонали, смещается на один ряд в сторону правого верхнего угла матрицы. При  $m < k$  в жордановой клетке  $J_k(0)^m$  будет  $m$  нулевых строк и  $(k - m)$  ненулевых ступенек. Когда же  $m$  станет больше или равно  $k$ , жорданова клетка станет равной нулю. Отсюда без труда выводятся требуемые утверждения о ранге матрицы. ■

Обозначим через  $N_k(\alpha)$  количество жордановых клеток размера  $k$  с собственным значением  $\alpha$  на диагонали в некоторой определенной жордановой матрице  $J$ . Вопрос о единственности жордановой нормальной форме полностью решается следующей теоремой.

**Теорема 8.2.** Для любой жордановой матрицы порядка  $n$

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

где  $J_{k_i}(\lambda_i)$  – жордановы клетки, справедлива следующая формула:

$$N_k(\alpha) = \operatorname{rk} (J - \alpha E)^{k-1} - 2\operatorname{rk} (J - \alpha E)^k + \operatorname{rk} (J - \alpha E)^{k+1}. \quad (15)$$

Здесь полагаем  $\operatorname{rk} (J - \alpha E)^0 = \operatorname{rk} E = n$ .

*Доказательство.* Замена матрицы  $J$  на  $J - \alpha E$  и  $N_k(\alpha)$  на  $N_k(0)$  позволяет ограничиться случаем  $\alpha = 0$ . В этом случае формула (15), которую требуется доказать, переписывается следующим образом:

$$N_k(0) = \operatorname{rk} J^{k-1} - 2\operatorname{rk} J^k + \operatorname{rk} J^{k+1}.$$

Для доказательства этой формулы нам понадобятся следующие равенства

$$\begin{aligned} N_1(0) + N_2(0) + N_3(0) + N_4(0) + \dots + N_n(0) &= n - \operatorname{rk} J, \\ N_1(0) + 2N_2(0) + 2N_3(0) + 2N_4(0) + \dots + 2N_n(0) &= n - \operatorname{rk} J^2, \\ N_1(0) + 2N_2(0) + 3N_3(0) + 3N_4(0) + \dots + 3N_n(0) &= n - \operatorname{rk} J^3, \\ N_1(0) + 2N_2(0) + 3N_3(0) + 4N_4(0) + \dots + 4N_n(0) &= n - \operatorname{rk} J^4, \\ &\vdots \\ N_1(0) + 2N_2(0) + 3N_3(0) + 4N_4(0) + \dots + nN_n(0) &= n - \operatorname{rk} J^n. \end{aligned} \quad (16)$$

Докажем их.

Матрица  $J$  – блочно-диагональная. По свойству произведения блочных матриц для возведения блочно-диагональной матрицы в степень надо возвести в данную степень каждый блок в отдельности:

$$\begin{aligned} J^m &= \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}^m = \\ &= \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1)^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2)^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s)^m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Очевидно, что ранг блочно-диагональной матрицы  $J^m$  равняется сумме рангов ее блоков. Так как  $n = \sum_{i=1}^s k_i$ , получаем, что

$$n - \operatorname{rk} J^m = \sum_{i=1}^s k_i - \sum_{i=1}^s \operatorname{rk} J_{k_i}(\lambda_i)^m = \sum_{i=1}^s (k_i - \operatorname{rk} J_{k_i}(\lambda_i)^m).$$

По лемме 8.1

$$k_i - \text{rk } J_{k_i}(\lambda_i)^m = \begin{cases} 0, & \text{при } \lambda \neq 0, \quad \forall m, \\ m, & \text{при } \lambda = 0, \quad m < k_i, \\ k_i, & \text{при } \lambda = 0, \quad m \geq k_i; \end{cases}$$

Поэтому в сумме  $\sum_{i=1}^s (k_i - \text{rk } J_{k_i}(\lambda_i)^m)$  будут нулевыми все слагаемые, за исключением тех, которые соответствуют жордановым клеткам с нулем на диагонали.

В случае, когда  $m = 1$ , каждая жорданова клетка с нулем на диагонали даст слагаемое, равное 1. Всего же жордановых клеток с нулем на диагонали:

$$N_1(0) + N_2(0) + N_3(0) + \dots + N_n(0),$$

и значит,

$$n - \text{rk } J = \sum_{i=1}^s (k_i - \text{rk } J_{k_i}(\lambda_i)) = N_1(0) + N_2(0) + N_3(0) + \dots + N_n(0),$$

и мы получаем первое равенство из (16).

При  $m = 2$  каждая жорданова клетка с нулем на диагонали порядка 1 даст слагаемое, равное своему порядку, т.е. 1. Всего же таких клеток  $N_1(0)$ . А каждая жорданова клетка с нулем на диагонали порядка  $k \geq 2$  даст слагаемое, равное 2, и всего таких клеток  $N_2(0) + N_3(0) + \dots + N_n(0)$ . Поэтому

$$n - \text{rk } J^2 = \sum_{i=1}^s (k_i - \text{rk } J_{k_i}(\lambda_i)^2) = N_1(0) + 2(N_2(0) + N_3(0) + \dots + N_n(0)),$$

и мы получаем второе равенство из (16).

Аналогично для  $m = 3$  каждая жорданова клетка с нулем на диагонали порядка  $k \geq 3$  даст слагаемое, равное 3, и всего таких клеток  $N_3(0) + \dots + N_n(0)$ ; каждая такая жорданова клетка порядка  $k \leq 2$  даст слагаемое, равное своему порядку, всего же жордановых клеток с нулем на диагонали порядка один –  $N_1(0)$ , а порядка два –  $N_2(0)$ . Поэтому

$$n - \text{rk } J^3 = \sum_{i=1}^s (k_i - \text{rk } J_{k_i}(\lambda_i)^3) = N_1(0) + 2N_2(0) + 3(N_3(0) + \dots + N_n(0)),$$

и мы получаем третье равенство из (16).

Аналогично доказываются остальные равенства из (16).



Теперь начиная с предпоследнего равенства в (16), вычитаем из каждого равенства предыдущее и получаем треугольную систему:

$$\begin{aligned} N_1(0) + N_2(0) + N_3(0) + N_4(0) + \dots + N_n(0) &= n - \operatorname{rk} J, \\ N_2(0) + N_3(0) + N_4(0) + \dots + N_n(0) &= \operatorname{rk} J - \operatorname{rk} J^2, \\ N_3(0) + N_4(0) + \dots + N_n(0) &= \operatorname{rk} J^2 - \operatorname{rk} J^3, \\ N_4(0) + \dots + N_n(0) &= \operatorname{rk} J^3 - \operatorname{rk} J^4, \\ &\vdots \\ N_n(0) &= \operatorname{rk} J^{n-1} - \operatorname{rk} J^n. \end{aligned}$$

Производя вычитание равенств на этот раз из верхних нижние, начиная с первого равенства, получим требуемые формулы (последняя формула  $N_n(0) = \operatorname{rk} J^{n-1} - 2\operatorname{rk} J^n + \operatorname{rk} J^{n+1}$  следует из последнего равенства, если к нему прибавить тождество  $0 = -\operatorname{rk} J^n + \operatorname{rk} J^{n+1}$ ). ■

Заметим, что в доказательстве предыдущей теоремы для получения равенств (16) можно было не применять лемму 8.1, а воспользоваться лишь информацией из доказательства этой леммы о том, что происходит с жордановой клеткой  $J_k(0)$  на диагонали при возведении ее в степень: при каждом последующем возведении клетки  $J_k(0)$  в степень ее ранг уменьшается на 1, пока не возведем в степень  $k$ . Тогда клетка зануляется, и дальше уменьшения ранга, связанного с данной клеткой нет. У клеток с ненулевым числом на диагонали ранг остается полным на протяжении всего процесса возведения в степень.

Из теоремы 8.2, поскольку ранги матриц линейного оператора не зависят от выбора базиса, получаем

**Следствие 8.1.** Пусть  $V$  –  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $F$ ,  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  – линейный оператор, который в некотором базисе имеет жорданову матрицу  $J$ ,  $N_k(\lambda)$  – количество жордановых клеток порядка  $k$  с собственным значением  $\lambda$  на диагонали в матрице  $J$ ,  $A$  – матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в произвольном базисе. Тогда справедлива следующая формула:

$$N_k(\lambda) = \operatorname{rk} (A - \lambda E)^{k-1} - 2\operatorname{rk} (A - \lambda E)^k + \operatorname{rk} (A - \lambda E)^{k+1}.$$

Здесь полагаем  $\operatorname{rk} (A - \lambda E)^0 = \operatorname{rk} E = n$ .

**Следствие 8.2.** Всякий линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем в некотором базисе записывается жордановой матрицей, причем эта матрица определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток на диагонали.

Напомним, что первое утверждение этого следствия есть теорема 8.1.

Отметим, что вместо алгебраической замкнутости поля, можно лишь потребовать, чтобы полю принадлежали все корни характеристического многочлена линейного оператора в конечномерном векторном пространстве. Тогда для линейного оператора найдется жорданов базис и его жорданова нормальная

форма будет определена единственным образом с точностью до перестановки жордановых клеток на диагонали.

## 9. ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА (ОКОНЧАНИЕ).

### 9.1. КРИТЕРИЙ ДИАГОНАЛИЗИРУЕМОСТИ В ТЕРМИНАХ МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА.

Из теорем о существовании и единственности жордановой нормальной формы получим критерий диагонализированности линейного оператора в терминах минимального многочлена:

**Теорема 9.1.** *Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  конечномерного векторного пространства  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$  диагонализирован тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен не имеет кратных корней.*

*Доказательство.* Пусть сначала  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  – базис из собственных векторов для  $\mathcal{A}$ , причем  $\mathcal{A}(e_i) = \lambda_i e_i$ , т.е. матрица оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $\mathcal{E}$  диагональна:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Так как минимальный многочлен линейного оператора равен минимальному многочлену его матрицы в произвольном базисе (лемма 7.1 п. 1),  $\mu_{\mathcal{A}}(t) = \mu_A(t)$ . В свою очередь, минимальный многочлен для матрицы  $A$  будет иметь вид

$$\mu_A(t) = (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_p),$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  – все попарно различные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Это следует из того, что многочлен  $(t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_p)$  является аннулирующим для матрицы  $A$ , а минимальный многочлен делит любой аннулирующий многочлен и наборы корней у минимального и характеристического многочлена совпадают (лемма 7.1 п. 2, 4).

Пусть теперь минимальный многочлен не имеет кратных корней. И пусть  $J$  – жорданова нормальная форма оператора  $\mathcal{A}$ , которая существует в силу алгебраической замкнутости поля (по теореме 8.1). По лемме 7.1 и утверждению 7.2 п.2 имеем

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{A}}(t) &= \mu_J(t) = \text{НОК} (\mu_{J_{k_1}(\lambda_1)}(t), \dots, \mu_{J_{k_s}(\lambda_s)}(t)) = \\ &= \text{НОК} ((t - \lambda_1)^{k_1}, \dots, (t - \lambda_s)^{k_s}) = (t - \alpha_1)^{n_1} \dots (t - \alpha_p)^{n_p}, \end{aligned}$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  – все попарно различные собственные значения линейного оператора  $\mathcal{A}$ ,  $n_i$  – максимальный порядок жордановой клетки с  $\alpha_i$  на диагонали в жордановой нормальной форме  $J$ . Так как минимальный многочлен не имеет кратных корней, получаем, что  $n_i = 1$  для всех  $i$ , т.е. в  $J$  все клетки имеют

порядок 1. Это и означает, что жорданова нормальная форма  $J$  диагональна.

■

## 9.2. КОРНЕВЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА.

При изучении недиагонализируемых линейных операторов в дополнение к собственным векторам принято рассматривать и более общие корневые вектора.

**Определение 9.1.** Пусть дан линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  векторного пространства  $V$  над полем  $F$ . Ненулевой вектор  $v \in V$  называется **корневым**, отвечающим корню  $\lambda$ , если для некоторого натурального  $m$  выполняется

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^m v = 0.$$

Наименьшее из таких  $m$  называется **высотой корневого вектора**.

Отметим, что корневой вектор высоты 1 – это собственный вектор.

Если  $e \in V$  – корневой вектор высоты  $m > 0$ , то

$$f = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{m-1} e$$

собственный вектор с собственным значением  $\lambda$ . Значит,  $\lambda$  – корень характеристического уравнения оператора  $\mathcal{A}$ .

Легко видеть, что все корневые векторы, отвечающие корню  $\lambda$ , с добавлением нулевого вектора, образуют подпространство в  $V$ . Это подпространство называется **корневым подпространством** и обозначается через  $V^\lambda$ .

Итак,  $V^\lambda$  содержит в себе подпространство  $V_\lambda$  собственных векторов, отвечающих характеристическому числу  $\lambda$ .

Кроме того,  $V^\lambda$  инвариантно относительно оператора  $\mathcal{A}$ . Действительно, если  $x \in V^\lambda$ , т.е.  $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^m x = 0$ , тогда

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^m (\mathcal{A}x) = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^m x = \mathcal{A}0 = 0,$$

значит,  $\mathcal{A}x \in V^\lambda$ .

Заметим также, что из утверждения 7.1 видно, что если  $\{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k\}$  – жорданов базис для некоторой жордановой клетки  $J_k(\lambda)$  из жордановой нормальной формы оператора  $\mathcal{A}$ , то

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})e_1 = 0,$$

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})e_2 = e_1,$$

...

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})e_{k-1} = e_{k-2},$$

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})e_k = e_{k-1}.$$

Отсюда следует, что  $e_i$  – корневой вектор высоты  $i$ , отвечающий корню  $\lambda$ .

**Теорема 9.2.** Пусть дан линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  векторного пространства  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$ . Тогда  $V$  распадается в прямую сумму корневых подпространств, отвечающим всем (различными) собственным значениям оператора  $\mathcal{A}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{E}$  – некоторый жорданов базис для линейного оператора  $\mathcal{A}$ , который существует в силу теоремы 8.1. Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  – все различные собственные значения, то переупорядочим векторы базиса  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{E}_p$  так, чтобы базисные векторы  $\mathcal{E}_i$  отвечали всем клеткам с  $\lambda_i$  на диагонали. Далее, пусть  $U_i$  – подпространство, порожденное векторами из  $\mathcal{E}_i$ . Понятно, что  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_p$ . Из утверждения 7.1 получаем, что  $U_i$  – инвариантное подпространство относительно действия  $\mathcal{A}$ . Нужно показать, что каждое  $U_i$  и есть корневое подпространство  $V^{\lambda_i}$ , отвечающее  $\lambda_i$ .

Так как все векторы из жорданова базиса, отвечающие собственному значению  $\lambda_i$ , являются корневыми, отвечающими корню  $\lambda_i$ , то и любая их линейная комбинация будет корневым вектором, отвечающими корню  $\lambda_i$ . Значит,  $U_i \subset V^{\lambda_i}$ .

Докажем обратное включение. Пусть  $x$  – произвольный вектор из  $V^{\lambda_i}$ . Так как  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_p$ , то

$$x = x_i + \tilde{x},$$

где

$$x_i \in U_i \subset V^{\lambda_i}, \quad \tilde{x} \in U_1 \oplus \dots \oplus U_{i-1} \oplus U_{i+1} \oplus \dots \oplus U_p.$$

Тогда  $\tilde{x} = x - x_i \in V^{\lambda_i}$ , т.е. для некоторого натурального  $m$  выполняется  $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^m \tilde{x} = 0$ .

Так как каждое подпространство  $U_i$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ , то и

$$U_1 \oplus \dots \oplus U_{i-1} \oplus U_{i+1} \oplus \dots \oplus U_p$$

инвариантно относительно действия оператора  $\mathcal{A}$ , а значит, и относительно действия оператора  $\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I}$ . Так как ограничение оператора  $\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I}$  на подпространство  $U_1 \oplus \dots \oplus U_{i-1} \oplus U_{i+1} \oplus \dots \oplus U_p$ , очевидно, имеет невырожденную матрицу в базисе  $\mathcal{E}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{E}_{i-1} \sqcup \mathcal{E}_{i+1} \sqcup \dots \sqcup \mathcal{E}_p$ , значит, на  $U_1 \oplus \dots \oplus U_{i-1} \oplus U_{i+1} \oplus \dots \oplus U_p$  оператор  $\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I}$  действует невырожденно. Отсюда получаем, что равенство  $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^m \tilde{x} = 0$  может выполняться только для нулевого вектора  $\tilde{x}$ , т.е.  $x = x_i \in U_i$ , что доказывает включение  $U_i \supset V^{\lambda_i}$ .

■

В частности, мы доказали:

**Следствие 9.1.**  $\dim V^\lambda = m$ , где  $m$  – кратность корня  $\lambda$  характеристического многочлена линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  векторного пространства  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$ .

### 9.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА ОТ МАТРИЦЫ.

Хотя жорданова нормальная форма выглядит сложнее, чем, например, диагональная матрица, однако и с ней можно достаточно просто производить алгебраические операции, в частности, используя правило сокращенного умножения блочных матриц. Так, если  $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_mt^m$  – произвольный многочлен с коэффициентами из поля  $F$  характеристики ноль, а

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

– жорданова матрица, то

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(J_{k_1}(\lambda_1)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(J_{k_2}(\lambda_2)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(J_{k_s}(\lambda_s)) \end{pmatrix}.$$

Покажем теперь, как вычислить многочлен от одной жордановой клетки.

**Утверждение 9.1.** Пусть

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

– жорданова клетка порядка  $k$  с собственным значением  $\lambda$  на диагонали. Тогда

$$f(J_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(k-3)}(\lambda)}{(k-3)!} & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

(Таким образом, на диагонали стоят числа  $f(\lambda)$ , затем правее и выше диагонали параллельно диагонали идет ряд с числами  $\frac{f'(\lambda)}{1!}$ , еще выше идет ряд с числами  $\frac{f''(\lambda)}{2!}$ , далее – ряд с числами  $\frac{f^{(3)}(\lambda)}{3!}$  и т.д.)

*Доказательство.* Представим многочлен  $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_mt^m$  по формуле Тейлора в точке  $\lambda$ :

$$f(t) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(t - \lambda) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(t - \lambda)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(t - \lambda)^m.$$

Тогда

$$f(J_k(\lambda)) = f(\lambda)E + \frac{f'(\lambda)}{1!}(J_k(\lambda) - \lambda E) + \\ + \frac{f''(\lambda)}{2!}(J_k(\lambda) - \lambda E)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(J_k(\lambda) - \lambda E)^m.$$

Но  $J_k(\lambda) - \lambda E = J_k(0)$ , следовательно,

$$f(J_k(\lambda)) = f(\lambda)E + \frac{f'(\lambda)}{1!}J_k(0) + \frac{f''(\lambda)}{2!}J_k(0)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}J_k(0)^m. \quad (17)$$

Как нам уже известно,  $i$ -я степень жордановой клетки  $J_k(0)$  есть матрица, диагональ единиц в которой сдвинута на  $i - 1$  позицию вправо и вверх по сравнению с ее положением в  $J_k(0)$ . При вычислении  $f(J_k(\lambda))$  по формуле (17) мы получим, что различные слагаемые суммы имеют ненулевые элементы на разных "диагоналях", причем эти элементы вычисляются по требуемой формуле  $\frac{f^{(i)}(\lambda)}{i!}$ . ■

Понятие значения многочлена от линейного оператора (матрицы) можно обобщить на случай функций, задаваемых степенными рядами  $f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m t^m$ . Примерами степенных рядов являются ряды Тейлора. Например,

$$e^t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \quad (\forall t \in \mathbb{R}), \\ \ln(1+t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m} \quad (\forall t \in (-1, 1]), \\ \cos t = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{t^{2m}}{(2m)!} \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

ПРИМЕР 1. Если  $f(t) = e^t$ , то для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$  имеем

$$e^{J_k(\lambda)} = \begin{pmatrix} e^\lambda & \frac{e^\lambda}{1!} & \frac{e^\lambda}{2!} & \cdots & \frac{e^\lambda}{(k-2)!} & \frac{e^\lambda}{(k-1)!} \\ 0 & e^\lambda & \frac{e^\lambda}{1!} & \cdots & \frac{e^\lambda}{(k-3)!} & \frac{e^\lambda}{(k-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^\lambda & \frac{e^\lambda}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 2. Пусть требуется найти значение функции  $f(t) = e^t$  от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим жорданову нормальную форму матрицы  $A$

$$J = \begin{pmatrix} i\varphi & 0 \\ 0 & -i\varphi \end{pmatrix}$$

(на диагонали стоят собственные значения матрицы  $A$ ) и матрицу перехода в соответствующий жорданов базис

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

(столбцы – координаты собственных векторов для  $A$ , отвечающие  $i\varphi$  и  $-i\varphi$ ). Тогда  $A = TJT^{-1}$  и, следовательно,

$$e^A = Te^JT^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$



## 10. БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ.

### 10.1. БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ МАТРИЦЫ.

Пусть  $V$  – векторное пространство опять над произвольным полем  $F$ .

**Определение 10.1.** *Функция от двух аргументов  $\beta : V \times V \rightarrow F$  называется билинейной функцией (или билинейной формой), если при любом фиксированном аргументе она является линейной по другому аргументу, т.е. для любых  $x, y, z \in V, \lambda \in F$  она удовлетворяет равенствам:*

$$\beta(x + y, z) = \beta(x, z) + \beta(y, z);$$

$$\beta(\lambda x, y) = \lambda\beta(x, y);$$

$$\beta(x, y + z) = \beta(x, y) + \beta(x, z);$$

$$\beta(x, \lambda y) = \lambda\beta(x, y).$$

**ПРИМЕР 1.** Скалярное произведение  $\beta(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos \alpha$  в пространстве геометрических векторов евклидовой плоскости  $V^2$  (трехмерного евклидова пространства  $V^3$ ) является билинейной функцией над  $\mathbb{R}$ .

**ПРИМЕР 2.** Если  $\varphi, \psi \in V^*$  – две линейные функции, то  $\beta(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$  является билинейной функцией.

**ПРИМЕР 3.** Рассмотрим пространство  $F[x]$  многочленов и фиксируем число  $x_0 \in F$ . Положим  $\beta(f, g) = f'(x_0)g(x_0)$ . Тогда  $\beta$  является билинейной функцией на  $F[x]$ .

**ПРИМЕР 4.** В пространстве  $M_n(F)$  квадратных матриц с элементами из поля  $F$  функция  $\beta(A, B) = \text{tr } AB$  является билинейной функцией на  $M_n(F)$ .

**ПРИМЕР 5.** Рассмотрим пространство  $F^2$  строк длины два. Тогда

$$\beta((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

является билинейной функцией на  $F^2$ .

**ПРИМЕР 6.** В пространстве, векторами которого являются непрерывные функции, функция

$$\beta(f, g) = \int_a^b \int_a^b K(s, t) f(s) g(t) ds dt$$

является билинейной функцией векторов  $f$  и  $g$  ( $K(s, t)$  – некоторая непрерывная функция переменных  $s$  и  $t$ ). Если  $K(s, t) \equiv 1$ , то  $\beta(f, g)$  есть произведение линейных функций  $\int_a^b f(s) ds$  и  $\int_a^b g(t) dt$ .

Для практической работы с билинейными функциями важно перейти на матричный язык.

Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  – произвольный базис  $n$ -мерного векторного пространства  $V$ . Выразим билинейную функцию  $\beta(x, y)$  через координаты  $x_1, \dots, x_n$  и  $y_1, \dots, y_n$  векторов  $x$  и  $y$  в этом базисе. Имеем:

$$\beta(x, y) = \beta(x_1e_1 + \dots + x_n e_n, y_1e_1 + \dots + y_n e_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \beta(e_i, e_j).$$

Обозначим числа  $\beta(e_i, e_j)$  через  $b_{i,j}$ . Тогда

$$\beta(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{i,j} x_i y_j. \quad (18)$$

**Определение 10.2.** Квадратная матрица  $B = (b_{i,j})$  порядка  $n$  называется матрицей билинейной функции  $\beta$  в базисе  $\mathcal{E}$ . Ранг матрицы  $B$  называется рангом билинейной функции  $\beta$ .

Как легко проверить, перемножая матрицы, равенство (18) можно записать в матричном виде:

$$\beta(x, y) = X^t B Y, \quad (19)$$

где  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$

При замене базиса матрица билинейной функции, разумеется, меняется. Получим закон ее изменения.

**Утверждение 10.1.** Пусть в  $n$ -мерном пространстве  $V$  даны два базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  и  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ . Пусть  $\beta$  – билинейная функция на векторном пространстве  $V$ ,  $B$  и  $\tilde{B}$  – ее матрицы в базисах  $\mathcal{E}$  и  $\tilde{\mathcal{E}}$ , соответственно. Тогда

$$\tilde{B} = T^t B T, \quad (20)$$

где  $T = T_{\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}}$  – матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

*Доказательство.* Пусть даны два произвольных вектора  $x$  и  $y$ . И пусть  $X, Y$  – их столбцы координат в базисе  $\mathcal{E}$ ,  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  – столбцы координат в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Тогда по формуле (1)

$$X = T \tilde{X} \text{ и } Y = T \tilde{Y}.$$

Имеем,

$$\tilde{X}^t \tilde{B} \tilde{Y} = \beta(x, y) = X^t B Y = (T \tilde{X})^t B (T \tilde{Y}) = \tilde{X}^t T^t B T \tilde{Y}.$$

Взяв  $x = \tilde{e}_i, y = \tilde{e}_j$ , мы получим равенство  $(i, j)$ -х элементов матрицы  $\tilde{B}$  и матрицы  $T^t B T$  для произвольных  $i, j$ . ■

**Следствие 10.1.** Ранг билинейной функции не зависит от выбора базиса.

*Доказательство.* Так как по утверждению 10.1 матрицы билинейной функции в разных базисах связаны формулой  $\tilde{B} = T^t B T$ , где  $T$  – невырожденная матрица, то для доказательства достаточно воспользоваться леммой 4.1. ■

## 10.2. СИММЕТРИЧЕСКИЕ БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ.

**Определение 10.3.** Билинейная функция  $\beta : V \times V \rightarrow F$  называется **симметрической**, если для любых векторов  $x, y \in V$  выполняется

$$\beta(x, y) = \beta(y, x).$$

Если билинейная функция в конечномерном векторном пространстве  $V$  является симметрической, а  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  – произвольный базис пространства  $V$ , то  $\beta(e_i, e_j) = \beta(e_j, e_i)$  для любых  $i, j$ , т.е.  $b_{i,j} = b_{j,i}$ . Таким образом матрица  $B$  билинейной функции  $\beta$  в базисе  $\mathcal{E}$  является симметрической.

Обратно, пусть билинейная функция  $\beta$  имеет симметрическую матрицу  $B$  в некотором базисе  $\mathcal{E}$ . Тогда, поскольку матрица размера  $1 \times 1$  не меняется при транспонировании, по формуле (19) получаем

$$\beta(x, y) = X^t B Y = (X^t B Y)^t = Y^t B^t (X^t)^t = Y^t B X = \beta(y, x).$$

Мы доказали

**Утверждение 10.2.** Билинейная функция в конечномерном векторном пространстве  $V$  является симметрической тогда и только тогда, когда ее матрица в каком-нибудь базисе является симметрической.

Скалярное произведение в  $V^2$  и  $V^3$  является примером симметрической билинейной функции.

**ЗАДАЧА.** Проверьте, что в пространстве  $M_n(F)$  квадратных матриц билинейная функция  $\beta(A, B) = \text{tr } AB$  является симметрической.

Нашей ближайшей задачей будет определить, к какому наиболее простому виду можно привести матрицу билинейной функции за счет выбора подходящего базиса. Геометрические ассоциации, связанные со скалярным произведением векторов, могут быть полезны при изучении произвольных билинейных функций. Этим объясняется вводимая ниже терминология.

**Определение 10.4.** Пусть  $\beta : V \times V \rightarrow F$  – симметрическая билинейная функция. Для произвольного подмножества  $S \subset V$  множество

$$S^\perp = \{v \in V \mid \beta(v, s) = 0 \ \forall s \in S\}$$

называется **ортогональным дополнением** к  $S$  (относительно  $\beta$ ).

В силу линейности  $\beta$  по первому аргументу получаем, что  $S^\perp$  является подпространством в пространстве  $V$ .

Основное свойство симметрических билинейных функций – следующее.

**Теорема 10.1.** Для произвольной симметрической билинейной функции

$$\beta : V \times V \rightarrow F$$

на конечномерном векторном пространстве  $V$  над полем  $F$ ,  $\text{char } F \neq 2$ , существует базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$ , в котором матрица функции  $\beta$  диагональна.

*Доказательство.* Докажем теорему индукцией по  $n = \dim V$  с очевидным основанием при  $n = 1$ .

Если  $\beta \equiv 0$ , то матрица билинейной функции в любом базисе – нулевая, а значит, диагональная. Далее предполагаем, что  $\beta$  – ненулевая функция. Тогда в  $V$  обязательно есть вектор  $e_1$ , для которого  $\beta(e_1, e_1) \neq 0$ . Действительно, если это не так, то  $\beta(x + y, x + y) = 0$  для всех  $x, y \in V$ . Но тогда

$$0 = \beta(x + y, x + y) = \beta(x, x) + \beta(x, y) + \beta(y, x) + \beta(y, y) = 2\beta(x, y).$$

Так как  $\text{char } F \neq 2$ , получаем, что  $\beta(x, y) = 0$  для всех  $x, y \in V$ , т.е.  $\beta \equiv 0$ , что противоречит предположению.

Теперь рассмотрим ортогональное дополнение  $U = \{e_1\}^\perp$ . Это – собственное подпространство в  $V$  размерности  $n - 1$ . Действительно, рассмотрим произвольный базис  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$  пространства  $V$ . Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – координаты вектора  $e_1$  в базисе  $\mathcal{F}$ ,  $B = (b_{i,j})$  – матрица билинейной функции  $\beta$  в базисе  $\mathcal{F}$ . Вектор  $x$  принадлежит  $U$  тогда и только тогда, когда  $\beta(x, e_1) = 0$ . Таким образом, согласно формуле (18) для определения  $x \in U$  нужно решить однородную систему из одного уравнения  $\sum_{i,j=1}^n b_{i,j} \lambda_i x_j = 0$  с  $n$  неизвестными  $x_1, \dots, x_n$ , координатами вектора  $x$  в базисе  $\mathcal{F}$ . Размерность пространства решений такой системы либо  $n$ , либо  $n - 1$ . Поскольку  $\beta(e_1, e_1) \neq 0$ , вектор  $e_1$  не принадлежит  $U$ . Значит,  $\dim U = n - 1$ .

Ограничение функции  $\beta$  на  $U$  – это по-прежнему симметрическая билинейная функция. По предположению индукции, в  $U$  найдется базис  $\{e_2, \dots, e_n\}$ , в котором матрица для этого ограничения имеет диагональный вид, т.е.

$$\beta(e_i, e_j) = 0 \text{ при } i \neq j, \quad 2 \leq i, j \leq n.$$

Так как  $U = \{e_1\}^\perp$ , то и  $\beta(e_1, e_j) = 0$  при  $j \geq 2$ . Таким образом,  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  – искомый базис. ■

**Определение 10.5.** Говорят, что симметрическая билинейная функция  $\beta : V \times V \rightarrow F$  имеет в базисе  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$  **канонический** (или **диагональный**) вид, если для всех векторов  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in V$  значение  $\beta(x, y)$  вычисляется по формуле  $\beta(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i$ . При этом базис  $\mathcal{E}$  называется **каноническим базисом** для  $\beta$ .

**ЗАДАЧА.** Можно ли билинейную функцию  $\beta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$  на пространстве  $\mathbb{Z}_2^2$  привести к каноническому виду?

## 11. КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ.

### 11.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ.

**Определение 11.1.** Пусть  $\beta : V \times V \rightarrow F$  – симметрическая билинейная функция. Функция  $q : V \rightarrow F$ , которая для любого  $x \in V$  определяется равенством

$$q(x) = \beta(x, x),$$

называется **квадратичной функцией** (или **квадратичной формой**), ассоциированной с функцией  $\beta$ .

Согласно (19) в матричном виде квадратичная функция на конечномерном векторном пространстве  $V$  записывается так:

$$q(x) = X^t B X. \quad (21)$$

А согласно (18) в координатах квадратичная функция записывается так:

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{i,j} x_i x_j. \quad (22)$$

Правая часть равенства (22) – однородный многочлен второй степени относительно  $x_1, \dots, x_n$ . (Собственно, слово "форма", когда-то употреблявшееся значительно шире, означает "однородный многочлен".)

**Определение 11.2.** Матрица билинейной функции  $\beta$  в заданном базисе называется также **матрицей квадратичной функции**  $q$  в этом базисе. Ранг матрицы квадратичной функции в заданном базисе называется **рангом квадратичной функции**  $q$ .

**Замечание 11.1.** В случае поля  $F$  характеристики, отличной от 2, квадратичная функция  $q(x)$  однозначно определяет симметрическую билинейную функцию  $\beta(x, y)$ , из которой она получена:

$$\beta(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)).$$

Процедура восстановления  $\beta(x, y)$  по  $q(x)$  называется **процедурой поляризации**.

Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между симметрическими билинейными и квадратичными функциями, если  $\text{char } F \neq 2$ . Имея в виду это соответствие, в дальнейшем изложении мы будем из соображений удобства иногда говорить о симметрических билинейных, иногда – о квадратичных функциях. Далее в этой лекции предполагаем, что  $\text{char } F \neq 2$  и  $\dim V = n$ .

Из теоремы 10.1 получаем

**Следствие 11.1.** Для любой квадратичной функции  $q : V \rightarrow F$  существует базис, в котором квадратичная функция  $q$  записывается в виде суммы квадратов:

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2. \quad (23)$$

Выражение (23) называется **каноническим** (или **диагональным**) **видом** квадратичной функции  $q$ .

## 11.2. МЕТОД ЛАГРАНЖА.

На самом деле, для практического приведения квадратичной функции к сумме квадратов используется **алгоритм Лагранжа** выделения полного квадрата.

Пусть дана координатная запись  $q(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{i,j} x_i x_j$  квадратичной функции в каком-нибудь базисе  $\mathcal{E}$ . После приведения подобных членов запись принимает вид

$$q(x) = \sum_{i=1}^n b_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{i,j} x_i x_j. \quad (24)$$

Если хотя бы один из коэффициентов при квадратах (не ограничивая общности, ниже считаем, что это  $b_{1,1}$ ) отличен от нуля, то применяем следующую процедуру. Собираем вместе все члены содержащие  $x_1$  и выносим общий множитель  $b_{1,1}$  за скобки:

$$b_{1,1} x_1^2 + 2b_{1,2} x_1 x_2 + \dots + 2b_{1,n} x_1 x_n + \dots = b_{1,1} \left( x_1^2 + 2 \frac{b_{1,2}}{b_{1,1}} x_1 x_2 + \dots + 2 \frac{b_{1,n}}{b_{1,1}} x_1 x_n \right) + \dots$$

Дополняем выражение в квадратных скобках до квадрата суммы:

$$b_{1,1} \left( x_1 + \frac{b_{1,2}}{b_{1,1}} x_2 + \dots + \frac{b_{1,n}}{b_{1,1}} x_n \right)^2 + \dots$$

И производя линейную замену переменных

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{b_{1,2}}{b_{1,1}} x_2 + \dots + \frac{b_{1,n}}{b_{1,1}} x_n, \\ y_2 = x_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n = x_n, \end{cases}$$

получаем

$$b_{1,1} y_1^2 + q(y_2, \dots, y_n),$$

где квадратичная форма  $q(y_2, \dots, y_n)$  не содержит переменную  $y_1$ . Далее применяется индукция по  $n$  к  $q(y_2, \dots, y_n)$ . Указанная процедура работает, лишь

если один из коэффициентов при квадратах (здесь  $b_{1,1}$ ) отличен от нуля. Если ненулевых коэффициентов при квадратах нет, но есть, допустим,  $2b_{1,2}x_1x_2$ ,  $b_{1,2} \neq 0$ , то полагаем

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = y_n, \end{cases}$$

в результате чего получаем коэффициент при  $y_1^2$  равный  $2b_{1,2} \neq 0$ . После этого применяется процедура, описанная ранее. (Выпишите преобразования базиса, отвечающие каждому из произведенных преобразований координат, и убедитесь, что эти преобразования действительно переводят базис снова в базис!)

Исходя из замечания 11.1, мы видим, что алгоритм Лагранжа дает другое доказательство теоремы о приведении матрицы симметрической билинейной функции к диагональному виду.

## 11.2. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К СУММЕ КВАДРАТОВ УНИТРЕУГОЛЬНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ.

*Угловым минором* порядка  $t$  квадратной матрицы  $B$  будем называть определитель матрицы, состоящей из элементов, стоящих на пересечении первых  $t$  строк и первых  $t$  столбцов матрицы  $B$ .

**Теорема 11.1.** Пусть  $\beta : V \times V \rightarrow F$  – симметрическая билинейная функция на векторном пространстве  $V$ ,  $B$  – ее матрица в некотором базисе  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ , а  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  – угловые миноры матрицы  $B$ ,  $\Delta_0 = 1$ .

Если все угловые миноры  $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$  отличны от нуля, то существует базис  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$  в векторном пространстве  $V$ , в котором квадратичная функция  $q$ , ассоциированная с  $\beta$ , имеет вид

$$q(y_1f_1 + \dots + y_nf_n) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}y_1^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}y_n^2, \quad (25)$$

причем матрица перехода от  $\mathcal{E}$  к  $\mathcal{F}$  является (верхней) унитарной, т.е. треугольной с единицами на главной диагонали.

Формула (25) называется **формулой Якоби**.

*Доказательство.* Докажем теорему индукцией по  $n$ .

При  $n = 1$  имеем  $f_1 = e_1$  и  $q(f_1) = \beta(e_1, e_1) = \Delta_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}$ .

При  $n > 1$  рассмотрим подпространство  $U = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ . Ограничение  $\beta|_U$  симметрической билинейной функции  $\beta$  на подпространство  $U$  является симметрической билинейной функцией. Матрица  $B'$  функции  $\beta|_U$  в базисе

$\mathcal{E}' = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  совпадает с матрицей, полученной из матрицы  $B$  вычеркиванием последней строки и последнего столбца, поэтому угловые миноры матрицы  $B'$  совпадают с  $\Delta_i$ ,  $i \leq n-1$  и, в частности, отличны от нуля. Отсюда следует, что к функции  $\beta|_U$  применимо предположение индукции. Значит, найдется базис  $\mathcal{F}' = \{f_1, \dots, f_{n-1}\}$  в подпространстве  $U$ , в котором

$$q|_U (y_1 f_1 + \dots + y_{n-1} f_{n-1}) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} y_{n-1}^2,$$

причем матрица перехода  $T'$  от  $\mathcal{E}'$  к  $\mathcal{F}'$  является (верхней) унитреугольной. Следовательно, матрица  $\tilde{B}'$  билинейной функции  $\beta|_U$  в базисе  $\mathcal{F}'$  имеет вид

$$\tilde{B}' = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \end{pmatrix}.$$

т.е. для любых  $i, j = \overline{1, n-1}$  имеем  $\beta(f_i, f_j) = 0$  при  $i \neq j$  и  $\beta(f_i, f_i) = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$ .

Положим

$$f_n = e_n - \frac{\beta(e_n, f_1)}{\beta(f_1, f_1)} f_1 - \dots - \frac{\beta(e_n, f_{n-1})}{\beta(f_{n-1}, f_{n-1})} f_{n-1}. \quad (26)$$

В этой формуле мы имеем право делить на  $\beta(f_i, f_i)$  при  $i = \overline{1, n-1}$ , так как

$$\beta(f_i, f_i) = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} \neq 0.$$

Так как  $f_n$  не принадлежит  $U$ , то  $\{f_1, \dots, f_{n-1}, f_n\}$  – базис пространства  $V$ . Осталось проверить, что базис  $\{f_1, \dots, f_{n-1}, f_n\}$  – искомый.

Непосредственно проверяется, что матрица  $T$  перехода от базиса  $\{e_1, \dots, e_n\}$  к базису  $\{f_1, \dots, f_{n-1}, f_n\}$  является (верхней) унитреугольной,  $T = \begin{pmatrix} T' & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Так как  $\beta(f_i, f_j) = 0$  для любых  $i, j = \overline{1, n-1}$  ( $i \neq j$ ), то, учитывая формулу (26) построение вектора  $f_n$ , для любого  $k = \overline{1, n-1}$  имеем:

$$\begin{aligned} \beta(f_n, f_k) &= \beta\left(e_n - \frac{\beta(e_n, f_1)}{\beta(f_1, f_1)} f_1 - \dots - \frac{\beta(e_n, f_{n-1})}{\beta(f_{n-1}, f_{n-1})} f_{n-1}, f_k\right) = \\ &= \beta(e_n, f_k) - \frac{\beta(e_n, f_1)}{\beta(f_1, f_1)} \beta(f_1, f_k) - \dots - \frac{\beta(e_n, f_{n-1})}{\beta(f_{n-1}, f_{n-1})} \beta(f_{n-1}, f_k) = \\ &= \beta(e_n, f_k) - \frac{\beta(e_n, f_k)}{\beta(f_k, f_k)} \beta(f_k, f_k) = 0. \end{aligned}$$



Отсюда получаем, что матрица  $\tilde{B}$  билинейной функции  $\beta$  в базисе  $\{f_1, \dots, f_{n-1}, f_n\}$  имеет диагональный вид

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{n,n} \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\det \tilde{B} = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot \dots \cdot \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \cdot \tilde{b}_{n,n} = \Delta_{n-1} \tilde{b}_{n,n}.$$

С другой стороны, из формулы (20) получаем, что

$$\det \tilde{B} = \det T^t B T = \det T^t \det B \det T = (\det T)^2 \det B = \det B = \Delta_n.$$

Так как  $\Delta_{n-1} \neq 0$ , получаем, что  $\tilde{b}_{n,n} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$ . ■

Отметим, что в доказательстве этой теоремы процедура приведения симметрической билинейной формы к каноническому виду с использованием формулы (26) называется *процессом ортогонализации*.

## 12. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ НАД $\mathbb{R}$ И НАД $\mathbb{C}$ .

### 12.1. НОРМАЛЬНЫЙ ВИД КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ НАД $\mathbb{R}$ И НАД $\mathbb{C}$ . ЗАКОН ИНЕРЦИИ.

Мы рассмотрим частный случай, особенно важный для приложений, когда основное поле – это  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ .

Для начала рассмотрим конечномерное векторное пространство  $V$  над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Если  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  – произвольная симметрическая билинейная функция, то по теореме 10.1 ее матрица  $D = (d_{i,j})$  в некотором базисе  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  является диагональной, причем можно считать, что лишь первые  $r$  диагональных элементов  $d_{1,1} = \beta(e_1, e_1), \dots, d_{r,r} = \beta(e_r, e_r)$  отличны от нуля, т.е. в этом базисе

$$\beta(x, y) = d_{1,1}x_1y_1 + d_{2,2}x_2y_2 + \dots + d_{r,r}x_r y_r.$$

Значит, в базисе  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_r, e_{r+1}, \dots, e_n\}$ , где  $\tilde{e}_i = \frac{1}{\sqrt{\beta(e_i, e_i)}}e_i$ ,  $i = \overline{1, r}$ , матрица билинейной функции  $\beta$  будет диагональной с диагональными элементами, равными либо 1, либо 0. Таким образом, в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$

$$\beta(x, y) = \tilde{x}_1\tilde{y}_1 + \tilde{x}_2\tilde{y}_2 + \dots + \tilde{x}_r\tilde{y}_r.$$

Так как число  $r$  равно рангу билинейной функции  $\beta$ , по следствию 10.1 число  $r$  не зависит от базиса, т.е. является инвариантом.

Поскольку матрицы для  $\beta$  и для ассоциированной с ней квадратичной формы  $q$  одинаковы, то получаем следующее

**Утверждение 12.1.** *Над полем комплексных чисел для любой квадратичной функции  $q$  существует базис, в котором*

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2. \quad (27)$$

*При этом число  $r$  является инвариантом квадратичной функции  $q$ .*

Выражение (27) для квадратичной функции  $q$  над полем комплексных чисел называется ее **нормальным видом**.

В случае конечномерного векторного пространства  $V$  над полем действительных чисел  $\mathbb{R}$  абсолютно то же самое рассуждение доказывает

**Утверждение 12.2.** *Над полем действительных чисел для любой квадратичной функции  $q$  существует базис, в котором*

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2, \quad (28)$$

*причем сумма  $k + l = r$  – инвариант квадратичной функции  $q$ .*

Выражение (28) для квадратичной функции  $q$  над полем действительных чисел называется ее **нормальным видом**. Числа  $k$  и  $l$  в выражении (28) называются, соответственно, **положительным** и **отрицательным индексами инерции** квадратичной функции  $q$ .

Так как мы можем по-разному выбрать тот базис, в котором квадратичная функция записывается в виде суммы квадратов, то возникает вопрос, зависит ли от выбора базиса количество коэффициентов, равных  $+1$  и  $-1$ , в нормальном виде квадратичной функции  $q$  над полем действительных чисел  $\mathbb{R}$  или же эти числа зависят лишь от самой квадратичной функции  $q$  (т.е. являются ее инвариантами). Оказывается верно следующее.

**Теорема 12.1.** (*Закон инерции*). *Положительный и отрицательный индексы инерции являются инвариантами квадратичной функции (т.е. не зависят от выбора базиса).*

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  и  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  – два базиса векторного пространства  $V$  над полем  $\mathbb{R}$  размерности  $n$ , в которых квадратичная функция  $q$  имеет виды

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2, \quad (29)$$

$$q(x) = \tilde{x}_1^2 + \dots + \tilde{x}_s^2 - \tilde{x}_{s+1}^2 - \dots - \tilde{x}_{s+t}^2, \quad (30)$$

где  $x_i, \tilde{x}_i$  – это координаты вектора  $x$  в базисах  $\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}$  соответственно.

Так как  $k+l = s+t = r$ , где  $r$  – ранг квадратичной функции  $q$ , достаточно доказать, что  $k = s$ . Допустим, что это не так. Пусть  $k > s$ . Рассмотрим подпространства  $U = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$  и  $W = \langle \tilde{e}_{s+1}, \dots, \tilde{e}_{s+t}, \tilde{e}_{s+t+1}, \dots, \tilde{e}_n \rangle$ . Согласно формуле Грассмана (Теорема 2.1),

$$\begin{aligned} \dim(U \cap W) &= \dim U + \dim W - \dim(U + W) = k + (n - s) - \dim(U + W) = \\ &= (n - \dim(U + W)) + (k - s) \geq k - s > 0. \end{aligned}$$

Предпоследнее неравенство справедливо, так как размерность любого подпространства в  $V$  не превосходит размерности всего пространства (Теорема 1.4). Итак, мы видим, что подпространство  $U \cap W$  – ненулевое. Значит, в  $U \cap W$  существует ненулевой вектор  $u$ . Тогда  $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$ , где не все  $\lambda_i$  равны нулю, и  $u = \mu_{s+1} \tilde{e}_{s+1} + \dots + \mu_n \tilde{e}_n$ , где не все  $\mu_j$  равны нулю. Подстановка в формулу (29) координат вектора  $u$  в базисе  $\mathcal{E}$  дает

$$q(u) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2 > 0.$$

С другой стороны, подстановка в формулу (30) координат вектора  $u$  в базисе  $\tilde{\mathcal{E}}$  дает

$$q(u) = -\mu_{s+1}^2 - \dots - \mu_{s+t}^2 \leq 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что  $k = s$ . ■

## 12.2. ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ.

Пусть  $V$  – векторное пространство над  $\mathbb{R}$ .

**Определение 12.1.** *Квадратичная функция  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  называется положительно определенной, если  $q(x) > 0$  для любого ненулевого вектора  $x \in V$ . Симметрическая билинейная функция  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  называется положительно определенной, если соответствующая ей квадратичная функция положительно определена.*

Аналогично определяются **отрицательно определенные** квадратичные и симметрические билинейные функции.

**ЗАДАЧА.** Докажите, что в пространстве  $M_n(\mathbb{R})$  билинейной функцией  $\text{tr } AB^t$  является симметрической и положительно определенной.

Очевидно, что нормальный вид положительно определенной квадратичной функции в  $n$ -мерном пространстве есть  $x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

Для решения вопроса о положительной определенности квадратичной функции используется так называемый критерий Сильвестра.

**Теорема 12.2.** *(Критерий Сильвестра). Симметрическая билинейная функция  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  является положительно определенной тогда и только тогда, когда все угловые миноры  $\Delta_i$  ее матрицы  $B$  в произвольном базисе  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  являются положительными числами.*

*Доказательство.* Пусть симметрическая билинейная функция  $\beta$  является положительно определенной. Утверждение будем доказывать индукцией по  $n = \dim V$  с очевидным основанием при  $n = 1$ . Допустим, что утверждение теоремы верно для размерностей, меньших  $n$ . Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  – произвольный базис пространства  $V$ ,  $B$  – матрица билинейной функции  $\beta$  в этом базисе, а  $\Delta_i$  – ее угловые миноры ( $1 \leq i \leq n$ ). Так как функция  $\beta$  – положительно определенная, то ее ограничение на подпространство  $U = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$  также положительно определено, откуда по предположению индукции вытекает, что угловые миноры  $\Delta_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , положительны. Далее осталось только доказать, что  $\Delta_n > 0$ . По теореме 10.1 существует базис  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ , в котором матрица  $\tilde{B}$  билинейной функции  $\beta$  диагональна, причем ее диагональные элементы  $\tilde{b}_{i,i} = \beta(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)$  положительны в силу положительной определенности билинейной функции  $\beta$ . Следовательно,

$$\det \tilde{B} = \tilde{b}_{1,1} \tilde{b}_{2,2} \dots \tilde{b}_{n,n} > 0.$$

С другой стороны, согласно формуле (20),

$$\det \tilde{B} = (\det T^t)(\det B)(\det T) = (\det T)^2 \Delta_n,$$

где  $T$  – матрица перехода от базиса  $\mathcal{E}$  к базису  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Отсюда  $\Delta_n > 0$ , как и требовалось.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть все угловые миноры  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  матрицы билинейной функции  $\beta$  в некотором базисе  $\mathcal{E}$  положительны. В частности, они отличны от нуля. Значит, по теореме 11.1 о формуле Якоби существует базис, в котором квадратичная функция  $q$ , ассоциированная с  $\beta$ , имеет вид

$$q(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} x_1^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2.$$

Из этой формулы видно, что  $q$  является положительно определенной. ■

**ЗАДАЧА.** Докажите, что для того, чтобы симметрическая билинейная функция была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, начиная с минуса, т.е.  $(-1)^i \Delta_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Винберг Э.Б.**, *Курс алгебры*: Научное издание М.: "Факториал" 1999 528.
- [2] **Кострикин А.И.**, *Введение в алгебру, часть II*. Физматлит Минобр 2004.
- [3] **Гельфанд И.М.**, *Лекции по линейной алгебре*: Наука 1966 280.
- [4] **Беклемишев Д.В.**, *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*: Учеб. для вузов. Физматлит Минобр 2002 374.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Векторные пространства	1
1.1. Основные определения	1
1.2. Координаты векторов. Преобразование координат при переходе к другому базису.	7
1.3. Изоморфизм векторных пространств.	11
2. Сумма и пересечение подпространств.	14
3. Сопряженное пространство.	19
3.1. Линейные функции.	19
3.2. Преобразование координат в $V^*$ .	22
3.3. Взаимозаменяемость $V$ и $V^*$ .	22
3.4. Подпространства и линейные функции.	24
4. Линейные отображения и линейные операторы.	26
4.1. Линейные отображения.	26
4.2. Определение линейного оператора и его матрицы.	32
4.3. Алгебра линейных операторов.	33
4.4. Инвариантные подпространства.	36
5. Собственные векторы и собственные значения.	38
5.1. Характеристический многочлен.	38
5.2. Комплексификация вещественного пространства. Комплексные собственные значения линейного оператора в вещественном векторном пространстве.	40
6. Собственные векторы (продолжение).	44
6.1. Собственные подпространства.	44
6.2. Приведение линейного оператора к треугольному виду. Теорема Гамильтона-Кэли.	47
7. Жорданова нормальная форма (начало).	52
7.1. Минимальный многочлен.	52
7.2. Жорданова нормальная форма. Основные определения и вспомогательные утверждения.	54
8. Жорданова нормальная форма (продолжение).	59
8.1. Существование жорданова базиса.	59
8.2. Единственность жордановой нормальной формы.	62
9. Жорданова нормальная форма (окончание).	67
9.1. Критерий диагонализированности в терминах минимального многочлена.	67
9.2. Корневые подпространства.	68
9.3. Вычисление многочлена от матрицы.	70
10. Билинейные функции.	73
10.1. Билинейные функции и их матрицы.	73
10.2. Симметрические билинейные функции.	75

11. Квадратичные функции.	77
11.1. Определение квадратичной функции.	77
11.2. Метод Лагранжа.	78
11.2. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов унитреугольным преобразованием.	79
12. Квадратичные формы над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$ .	82
12.1. Нормальный вид квадратичных форм над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$ . Закон инерции.	82
12.2. Положительно определенные квадратичные формы.	84
Список литературы	86