ЛЕКЦИЯ 10

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— это число (или выражение), которое определяется по формуле

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \dots a_{n,\sigma_n}.$$

Другими словами, *определителем* $\det A$ матрицы (a_{ij}) называется алгебраическая сумма всевозможных произведений коэффициентов a_{ij}, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. В каждом произведении сомножители записываются в порядке следования строк, а номера столбцов определяются образами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ номеров строк при перестановке $\sigma \in S_n$. Всего под знаком суммы стоит $n!$ слагаемых; слагаемый, отвечающие четным перестановкам, входят со знаком плюс, а отвечающие нечетным перестановкам — со знаком минус.

Получим связь определителя матрицы и транспонированной матрицы:

Теорема 1. *Определители любой квадратной матрицы A и транспонированной матрицы A^T совпадают:*

$$\det A^T = \det A.$$

Доказательство. Положив $A = (a_{ij})$ и $A^T = (a'_{ij})$, где $a'_{ij} = a_{ij}$, и заметив, что $k = \pi(\pi^{-1}k)$ для любой перестановки $\pi \in S_n$ и для любого номера $k = 1, 2, \ldots, n$, мы видим, что упорядочение множителей произведения

$$a'_{1,\pi_1} \ldots a'_{n,\pi_n}$$

в соответствии с перестановкой π^{-1} дает

$$a'_{1,\pi_1} \ldots a'_{n,\pi_n} = a'_{\pi^{-1}(1),\pi(\pi^{-1}(1))} \ldots a'_{\pi^{-1}(n),\pi(\pi^{-1}(n))} = \\ = a'_{\pi^{-1}(1),1} \ldots a'_{\pi^{-1}(n),n} = a_{1,\pi^{-1}(1)} \ldots a_{n,\pi^{-1}(n)}.$$

Учтем еще, что знаки взаимно обратных перестановок совпадают.

Значит, в формуле определителя имеем

$$\det A^T = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, a'_{1,\pi_1} \ldots a'_{n,\pi_n} = \\ = \sum_{\pi^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn} \pi^{-1} a_{1,\pi^{-1}(1)} \ldots a_{n,\pi^{-1}(n)} = \\ = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1,\sigma_1} \ldots a_{n,\sigma_n} = \det A.$$

□

Замечание 1. Утверждение предыдущей теоремы интерпретируется так: если для определителей выполнено какой-то свойство относительно строк (столбцов), то оно имеет место относительно столбцов (строк).

Выпишем основные свойства определителей. Этих свойств немного, но они для нас важны.

Как и раньше, будем обозначать строки матрицы A как

$$A_{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а столбцы — как

$$A^{(j)} = [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}] \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Соответственно, саму матрицы мы представим как объединение или строк, или столбцов:

$$A = [A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}] = (A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}).$$

Произвольную функцию

$$\Phi : [A_{(1)}, \dots, A_{(n)}] \mapsto \Phi(A_{(1)}, \dots, A_{(n)})$$

мы будем называть *полилинейной*, если она линейна по каждому аргументу $A_{(i)}$, то есть для каждого $i = 1, \dots, n$

$$\Phi(A_{(1)}, \dots, \alpha A'_{(i)} + \beta A''_{(i)}, \dots, A_{(n)}) =$$
$$= \alpha\Phi(A_{(1)}, \dots, A'_{(i)}, \dots, A_{(n)}) + \beta\Phi(A_{(1)}, \dots, A''_{(i)}, \dots, A_{(n)}).$$

Та же функция Φ называется *кососимметрической*, если

$$\Phi(A_{(1)}, \ldots, A_{(i)}, A_{(i+1)}, \ldots, A_{(n)}) = \\ = -\Phi(A_{(1)}, \ldots, A_{(i+1)}, A_{(i)}, \ldots, A_{(n)}), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Замечание 2. Кососимметричность полилинейной функции Φ эквивалентна выполнению соотношений

$$\Phi(A_{(1)}, \ldots, A_{(i-1)}, X, X, A_{(i+2)}, \ldots, A_{(n)}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

В самом деле, положив $A_{(i)} = A_{(i+1)} = X$ в соотношении полилинейности, мы придем к нужному нам условию.

Обратно, при $X = A_{(i)} + A_{(i+1)}$ из выписанного соотношения для Φ вытекает

$$\Phi(\ldots, A_{(i)}, A_{(i)}, \ldots) + \Phi(\ldots, A_{(i+1)}, A_{(i+1)}, \ldots) + \\ + \Phi(\ldots, A_{(i)}, A_{(i+1)}, \ldots) + \Phi(\ldots, A_{(i+1)}, A_{(i)}, \ldots) = \\ = \Phi(\ldots, A_{(i)} + A_{(i+1)}, A_{(i)} + A_{(i+1)}, \ldots) = 0.$$

Понятно, что первые два слагаемых равны нулю, откуда получается соотношение полилинейности.

Те же определения и замечания относятся к функции

$$\Phi(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$$

векторов-столбцов.

Теорема 2. *Функция* $A \mapsto \det A$ *на множестве* $M_n(\mathbb{R})$ *обладает следующими свойствами:*

(1) $\det A$ — *кососимметрическая функция строк матрицы* A *(то есть при перестановке местами любых двух строк определитель меняет знак на противоположный);*

(2) $\det A$ — *полилинейная функция строк матрицы* A *(то есть определитель матрицы* A *является линейной функцией элементов любой ее строки* $A_{(k)}$*);*

(3) $\det E = 1$.

Доказательство. (1) Пусть A' — матрица, полученная из A перестановкой строк $A_{(s)}$, $A_{(t)}$, то есть

$$A'_{(s)} = A_{(t)}, \quad A'_{(t)} = A_{(s)}$$

и

$$A'_{(i)} = A_{(i)} \text{ при } i \neq s, t.$$

Запишем теперь любую перестановку $\pi \in S_n$ как произведение $\pi = \sigma\tau$, где τ — это транспозиция (s, t).

Распишем выражение для определителя:

$$\det A' = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot a'_{1,\pi_1} \dots a'_{n,\pi_n} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \cdot a'_{1,\sigma\tau(1)} \dots a'_{s,\sigma\tau(s)} \dots a'_{t,\sigma\tau(t)} \dots a'_{n,\sigma\tau(n)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \cdot a'_{1,\sigma_1} \dots a'_{s,\sigma_t} \dots a'_{t,\sigma_s} \dots a'_{n,\sigma_n} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \cdot a_{1,\sigma_1} \dots a_{t,\sigma_t} \dots a_{s,\sigma_s} \dots a_{n,\sigma_n} =$$
$$= -\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1,\sigma_1} \dots a_{n,\sigma_n} = -\det A.$$

(1) Пусть $A = (a_{ij})$ и пусть $A_{(k)} = \lambda B_{(k)} + \mu C_{(k)}$, где

$$A' = [A_{(1)} \ldots, A_{(k-1)}, B_{(k)}, A_{(k+1)}, \ldots, A_{(n)}]$$

и

$$A'' = [A_{(1)} \ldots, A_{(k-1)}, C_{(k)}, A_{(k+1)}, \ldots, A_{(n)}].$$

По условию

$$a_{kj} = \lambda b_{kj} + \mu c_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

По определению

$$\begin{aligned}
\det[A_{(1)}, \ldots, A_{(k)}, \ldots, A_{(n)}] &= \det A = \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1,\sigma_1} \ldots a_{k,\sigma_k} \ldots a_{n,\sigma_n} = \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1,\sigma_1} \ldots (\lambda b_{k,\sigma_k} + \mu c_{k,\sigma_k}) \ldots a_{n,\sigma_n} = \\
&= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1,\sigma_1} \ldots b_{k,\sigma_k} \ldots a_{n,\sigma_n} + \\
&+ \mu \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1,\sigma_1} \ldots c_{k,\sigma_k} \ldots a_{n,\sigma_n} = \\
&= \lambda \det[A_{(1)}, \ldots, B_{(k)}, \ldots, A_{(n)}] + \mu \det[A_{(1)}, \ldots, C_{(k)}, \ldots, A_{(n)}] = \\
&= \lambda \det A' + \mu \det A'',
\end{aligned}$$

что и требовалось.

(3) Очевидно,

$$\det E = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{1,\sigma_1} \ldots \delta_{n,\sigma_n} = \operatorname{sgn} e \, \delta_{1,1} \ldots \delta_{n,n} = 1.$$

$\square$

Из этой теоремы вытекает несколько простых утверждений, которые мы сформулируем в виде свойств определителей, но доказывать будем для более общей ситуации — любой функции $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, обладающей только свойствами (1)–(2).

(4) Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\det \lambda A = \lambda^n \det A.$$

Доказательство. Действительно, в силу свойства (2), примененного последовательно к строкам с номерами $1, 2, \ldots,$ имеем

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda A) = \Phi[\lambda A_{(1)}, \lambda A_{(2)}, \ldots, \lambda A_{(n)}] = \\ = \lambda\Phi[A_{(1)}, \lambda A_{(2)}, \ldots, \lambda A_{(n)}] = \lambda^2\Phi[A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, \lambda A_{(n)}] = \ldots \\ \cdots = \lambda^n\Phi[A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(n)}] = \lambda^n \det A.\end{aligned}$$

□

(5) *Определитель матрицы с нулевой строкой равен нулю.*

Доказательство. Пусть, например, $A_{(k)} = (0, 0, \ldots, 0)$. Тогда и $2A_{(k)} = (0, 0, \ldots, 0)$. Следовательно, по (2)

$$\begin{aligned}\Phi(A) = \Phi[A_{(1)}, \ldots, A_{(k)}, \ldots, A_{(n)}] = \Phi[A_{(1)}, \ldots, 2A_{(k)}, \ldots, A_{(n)}] = \\ = 2\Phi[A_{(1)}, \ldots, A_{(k)}, \ldots, A_{(n)}] = 2\Phi(A),\end{aligned}$$

откуда $\Phi(A) = 0$. □

(6) *Если в квадратной матрице* A *две строки совпадают, то ее определитель равен нулю.*

Доказательство. Возьмем опять произвольную функцию Φ со свойствами (1)–(2).

Поменяв местами две совпадающие строки $A_{(s)}$ и $A_{(s)}$, мы получим ту же матрицу A. С другой стороны, определитель должен был поменять знак. Значит, он нулевой. □

(7) *Определитель не меняется, если над его строками совершать элементарные преобразования типа* II.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай применения одного элементарного преобразования. Пусть после прибавления к s-й строке матрицы A ее t-й строки, умноженной на λ, получилась матрицы A'.

Тогда по свойствам (1) и (6) для Φ имеем

$$\begin{aligned}\Phi(') &= \Phi[A_{(1)}, \dots, A_{(s)} + \lambda A_{(t)}, \dots, A_{(t)}, \dots] = \\ &= \Phi[A_{(1)}, \dots, A_{(s)}, \dots, A_{(t)}, \dots] + \lambda\Phi[A_{(1)}, \dots, A_{(t)}, \dots, A_{(t)}, \dots] = \\ &= \Phi[A_{(1)}, \dots, A_{(s)}, \dots, A_{(t)}, \dots] = \Phi(A).\end{aligned}$$

□

Замечание 3. Проведенные доказательства показывают, что любая функция $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ со свойствами (1)–(2) обладает также свойствами (4)–(7).

Предложение 1. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— верхняя треугольная матрица порядка n, E — единичная матрица и $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ — любая функция, обладающая свойствами (1)–(2)*. Тогда*

$$\Phi(A) = \Phi(E) a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Доказательство. Мы уже понимаем, что можем опираться на свойства (2) и (7).

Заметим, что если какое-то из чисел $a_{11}, \dots, a_{nn}$ равно нулю, то правая часть требуемого равенства равна нулю, а матрицу элементарными преобразованиями типа (II) над строками можно привести к матрице со строкой нулей, из-за чего будет $\Phi(A) = 0$ и равенство окажется верным.

Будем теперь считать, что все a_{ii} — ненулевые.

На основании (2) вынесем a_{nn} за знак Φ:

$$\Phi(A) = a_{nn} \Phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Применим теперь к A серию элементарных преобразований типа II — будем вычитать для каждой i-й строки, $1 \leqslant i < n$, последнюю строчку, умноженную на a_{in}.

При этом все элементы последнего столбца, кроме последнего, обратятся в ноль, все другие элементы матрицы останутся без изменения.

Применим то же самое рассуждение к предпоследней строке вновь полученной матрицы, и т. д.

Каждый раз очередной элемент a_{ii} выносится за знак Φ и рассуждение возобновляется.

В конце концов получим искомую формулу. $\square$

Следствие 1. *Если A — верхнетреугольная матрица, то*

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Доказанные свойства дают возможность сравнительно легко вычислять определитель матрицы порядка n.

Один из методов заключается в следующем.

Матрицу (a_{ij}) следует привести элементарными преобразованиями к треугольному виду. Пусть мы получим треугольную матрицу $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$. Предположим, что в процессе приведения было применено q элементарных преобразований типа I и сколько-то элементарных преобразований типа II. Так как вторые не меняют определитель вообще, а первые меняют его знак, то

$$\det A = (-1)^q \det \overline{A}.$$

Таким образом,

$$\det A = (-1)^q \overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\dots\overline{a}_{nn}.$$

Это из есть одна из формул вычисления определителя.