ЛЕКЦИЯ 11

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО СТРОКЕ ИЛИ СТОЛБЦУ

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ С УГЛОМ НУЛЕЙ

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Теорема 1. *Пусть $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ — функция, обладающая следующими свойствами:*

(1) *при перестановке местами любых двух соседних строк матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ значение функции Φ меняет знак;*

(2) $\Phi(A)$ *является линейной функцией элементов каждой строки матрицы A.*

Тогда

$$\Phi(A) = \Phi(E) \cdot \det A.$$

Доказательство. Как мы знаем, свойство (1) эквивалентно тому, что $\Phi(A)$ меняет знак на противоположный при перестановке любых двух строк, то есть при любом элементарном преобразовании типа I.

Как мы уже показывали, это означает, что $\Phi(A)$ обладает свойствами (4)–(7).

В частности, $\Phi(A)$ не меняется, если матрицу A подвергнуть элементарному преобразованию типа II.

Приведем матрицу A при помощи элементарных преобразований к треугольному виду (и обозначим этот треугольный вид через $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$), где, конечно, некоторые элементы на диагонали могут равняться нулю.

С учетом вышесказанного мы имеем формулы

$$\det A = (-1)^q \det \overline{A} = (-1)^q \overline{a}_{11} \overline{a}_{22} \ldots \overline{a}_{nn}$$

и

$$\Phi(A) = (-1)^q \Phi(\overline{A}),$$

где q — число элементарных преобразований типа I, совершенных при переходе от A к $\overline{A}$.

Однако мы уже доказывали, что для верхнетреугольных матриц и функции Φ, удовлетворяющей свойствам (1)–(2), верно, что

$$\Phi(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}\Phi(E).$$

Таким образом, теорема доказана. $\square$

Итак, свойствами (1)–(3) функция $\det$ характеризуется однозначно.

Замечание 1. Заметим, что теперь нами доказано, что определитель матрицы совпадает с ориентированным объемом параллелепипеда, натянутого на столбцы этой матрицы, так как определитель задается теми же аксиомами, которые являются свойствами объема.

РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО СТРОКЕ ИЛИ СТОЛБЦУ

Определение 1. Определитель матрицы, получающейся из $A = (a_{ij})$ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, обозначается M_{ij} и называется *минором* матрицы A, соответствующим элементу a_{ij}.

Величина $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij}.

Предложение 1. *Если*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$\det A = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}.$$

Доказательство. Так как $\det A = \det A^T$ и так как a_{11} — единственный отличный от нуля элемента первого столбца $A^{(1)}$, то $a_{\pi_1,1} = 0$ при $\pi(1) \neq 1$ и

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot a_{\pi_1,1} a_{\pi_2,2} \dots a_{\pi_n,n} = \\ = \sum_{\pi \in S_n, \pi(1)=1} \operatorname{sgn} \pi \cdot a_{1,1} a_{\pi_2,2} \dots a_{\pi_n,n}.$$

Совокупность всех перестановок $\pi \in S_n$, оставляющих на месте символ 1, отождествляется с множеством S_{n-1} перестановок, действующих на множестве $\{2, 3, \ldots, n\}$. Таким образом,

$$\det A = a_{11} \cdot \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{\sigma_2,2} \ldots a_{\sigma_n,n} =$$

$$= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} M_{11}.$$

□

Теорема 2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. *Справедливы следующие формулы:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(разложение определителя по элементам j*-го столбца);*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(разложение определителя по элементам i*-й строки).*

Иначе говоря, определитель матрицы A *равен сумме произведений всех элементов некоторого столбца (некоторой строки) на их алгебраические дополнения.*

Доказательство. Опираясь на основные свойства (1) и (2) определителей (сначала относительно столбцов, а потом — относительно строк), выпишем цепочку равенств:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \hdotsfor{7} \\ a_{ij} & a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(j-1)+(i-1)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

Таким образом, первая формула доказана.

2) Положим теперь $A^T = (a'_{ij})$, где $a'_{ji} = a_{ij}$,

Заметим еще, что минором, соответствующим элементу a'_{ji} в $\det A^T$, будет $M'_{ji} = M_{ij}$. Как было показано выше,

$$\det A = \det A^T = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a'_{ji} M'_{ji} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$

то есть мы пришли ко второй формуле. $\square$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ С УГЛОМ НУЛЕЙ

Чем больше нулей среди элементов матрицы A и чем лучше они расположены, тем легче вычислять определитель $\det A$.

Например, мы знаем, что определитель треугольной матрицы (нижней или верхней) равен произведению диагональных элементов.

Теперь докажем важную теорему об определителе матрицы с углом нулей.

Теорема 3. *Для определителя D порядка $n+m$, у которого на пересечении первых n столбцов и последних m строк стоят нули, имеет место формула*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \ldots & a_{1,n+m} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \ldots & a_{n,n+m} \\ 0 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 0 & b_{m1} & \ldots & b_{mm} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ b_{m1} & \ldots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

(определитель в левой части называется квазитреугольным или определителем с углом нулей).

Доказательство. Зафиксируем сначала $n(n+m)$ элементов a_{ij} рассмотрим определитель D как функцию элементов b_{kl}, которые образуют квадратную матрицу порядка m.

На полученную функцию можно смотреть как на функцию матрицы B:

$$D = \mathcal{D}(B).$$

Ясно, что полилинейность и кососимметричность определителя D относительно последних m строк эквивалентна тем же свойствам $\mathcal{D}(B)$ относительно строк матрицы B.

Значит, правомерно применить к $\mathcal{D}(B)$ теорему, согласно которой

$$\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(E)\det B.$$

По определению функции $\mathcal{D}$ имеем

$$\mathcal{D}(E) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \dots & a_{1,n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \dots & a_{n,n+m} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложим $\mathcal{D}(E)$ по последней строке, затем по предпоследней, и т.п.

Повторив эту операцию m раз, мы убедимся в том, что $\mathcal{D}(E) = \det A$.

Окончательно получаем

$$D = \mathcal{D}(B) = \det A \cdot \det B.$$

$\square$

В более компактных обозначениях можно написать

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Здесь A и B — квадратные матрицы, а нулевая матрица 0 и матрица C — прямоугольные.

Благодаря тому, что определитель транспонированной матрицы совпадает с определителем исходной, получаем

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

Теорема 4. *Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n. Тогда*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Доказательство. Согласно формулам умножения матриц i-ая строка матрицы $(AB)_{(i)}$ записывается в виде

$$(AB)_{(i)} = (A_{(i)}B^{(1)}, A_{(i)}B^{(2)}, \ldots, A_{(i)}B^{(n)}),$$

где

$$A_{(i)}B^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Фиксируем матрицу B и для любой матрицы A положим

$$\mathcal{D}_B(A) = \det AB.$$

Докажем, что функция $\mathcal{D} = \mathcal{D}_B$ удовлетворяет условиям кососимметричности и полилинейности.

В самом деле, поменяем $A_{(s)}$ и $A_{(t)}$ местами. Так как s-я и t-я строки матрицы AB имеют вид

$$(A_{(s)}B^{(1)}, \dots, A_{(s)}B^{(n)}),$$
$$(A_{(t)}B^{(1)}, \dots, A_{(t)}B^{(n)}),$$

то при этом они тоже поменяются местами и, значит,

$$\mathcal{D}(\dots, A_{(s)}, \dots, A_{(t)}, \dots) = \mathcal{D}(A) =$$
$$= \det AB = \det[\dots, (AB)_{(s)}, \dots, (AB)_{(t)}, \dots] =$$
$$= -\det[\dots, (AB)_{(t)}, \dots, (AB)_{(s)}, \dots] = -\mathcal{D}(\dots, A_{(t)}, \dots, A_{(s)}, \dots).$$

Далее, как известно, $\det AB$ — линейная функция элементов i-й строки $(AB)_{(i)}$:

$$\det AB = \lambda_1 A_{(i)}B^{(1)} + \lambda_2 A_{(i)}B^{(2)} + \dots + \lambda_n A_{(i)}B^{(n)}.$$

Поэтому

$$\mathcal{D}(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k a_{ik},$$

где

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{kj}$$

— скаляр, не зависящий от элементов i-й строки $A_{(i)}$ матрицы A.

Таким образом, выполнены оба условия, поэтому $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(E) \cdot \det A$. Но по определению $\mathcal{D}(E) = \det EB = \det B$.

Отсюда вытекает искомая формула. $\square$