ЛЕКЦИЯ 21

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ АЛГЕБРЫ

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЗАМКНУТОСТЬ ПОЛЯ $\mathbb{C}$

Пусть $\mathbb{F}$ — поле и f — произвольный многочлен над $\mathbb{F}$.

Определение 1. Поле $\mathbb{F}$ называется *алгебраически замкнутым*, если каждый многочлен из кольца $\mathbb{F}[x]$ разлагается на линейные множители.

То же самое можно выразить другими словами: *поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, если неприводимыми над $\mathbb{F}$ являются лишь линейные многочлены.*

Если любой многочлен $f \in \mathbb{F}[x]$ обладает по крайней мере одним корнем, то поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто.

Доказательство. Действительно, тогда

$$f(x) = (x - a)h(x), \quad a \in \mathbb{F}, \quad h \in \mathbb{F}[x],$$

но по условию для многочлена $h[x]$ в $\mathbb{F}$ также существует хотя бы один корень, то есть

$$h(x) = (x - b)r(x), \quad b \in \mathbb{F}, \ r \in \mathbb{F}[x].$$

Подолжая этот процесс, мы придем в конце концов к полному разложению f на линейные множители. Так как f — произвольный многочлен, то поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. $\square$

Хотя и справедливо утверждение о том, что *для всякого поля* $\mathbb{F}$ *существует расширение* $\widetilde{\mathbb{F}} \supset \mathbb{F}$, *являющееся алгебраически замкнутым полем* (*теорема Штейница*), на первых порах все же трудно воспринять не только конструкцию алгебраически замкнутого расширения, но и саму идею такого расширения. Тем более приятно, что мы фактически располагаем ярким и очень важным примером алгебраически замкнутого поля, как об этом гласит так называемая *основная теорема алгебры.*

Именно, справедлива

Теорема 1. *Поле комплексных чисел* $\mathbb{C}$ *алгебраически замкнуто.*

Если формулировать ее иначе, то получим:

Произвольный многочлен $f(x)$ *степени* $n \geqslant 1$ *с комплексными или вещественными коэффициентами имеет ровно* n *комплексных корней, считаемых со своими кратностями.*

Громкий титул основной теоремы алгебры эта теорема приобрела еще в те времена, когда решение алгебраических уравнений было одним из главных занятий алгебраистов.

Впервые строгое доказательство основной теоремы алгебры было предложение Гауссом в 1779 году. С тех пор появилось много вариантов доказательств, различающихся между собой, так сказать, степенью алгебраичности. Необходимость опираться а свойства непрерывности полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ возникает в этих доказательствах в той или иной степени.

Сейчас мы приведем доказательство, основанное на элементарных сведениях из математического анализа и восходящее к идеям Даламбера, Эйлера, Гаусса, Коши, Аргана. Именно последнему (1814 год) принадлежит наиболее прозрачное изложение, которому с тех пор следуют почти все учебники по алгебре.

Его неалгебраичность начинается с двух вспомогательных утверждений, которые можно найти в любом курсе анализа.

(1) *Каждый комплексный многочлен*

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n, \quad n \geqslant 0,$$

является непрерывной функцией в любой точке плоскости $\mathbb{C}$.

Другими словами, для любой окрестности точки $f(z_0)$ — $V = V(f(z_0))$ найдется такая окрестность точки z_0 — $U = U(z_0)$, что для всех $z \in U$ выполняется $f(z) \in V$.

(2) *Каждая непрерывная функция* $f : K \to \mathbb{R}$ *на компакте* $K \subset \mathbb{R}^2$ *достигает своего минимума* (напомним, что компакт — это замкнутое ограниченное подмножество плоскости).

Компактом у нас будет круг $|z| \leqslant r$ некоторого достаточно большого радиуса r, который мы определим далее.

Чтобы прояснить геометрическую идею доказательства, вообразим себе поверхность в $\mathbb{R}^3$, отвечающую уравнению $w = |f(z)|$: значения z изображаются на горизонтальной плоскости $\mathbb{R}^2$, а значения $|f(z)|$ откладываются вверх, в направлении оси w, перпендикулярной к $\mathbb{R}^2$. Из непрерывности функции $f(z)$ следует непрерывность функции $|f(z)|$ на всей плоскости $\mathbb{C}$. Нужно убедиться, что хотя бы в одной точке $w = 0$.

Последующие рассуждения разобьем на несколько шагов.

Лемма 1. *Существует положительное число $r \in \mathbb{R}$ такое, что*

$$|f(z)| > |f(0)|$$

для всех $z \in \mathbb{C}$, для которых $|z| > r$.

Доказательство. Действительно, для $z \neq 0$ имеем

$$|f(z)| = |z|^n |a_0 + g(z^{-1})|,$$

где

$$g(u) = a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_n u^n \in \mathbb{C}[u].$$

Из непрерывности функции g в нуле следует существование такого вещественного $\delta > 0$, что

$$|g(u)| \leqslant |a_0|/2 \text{ при } |u| < \delta.$$

Таким образом,

$$|f(z)| \geqslant |z|^n(|a_0| - |g(z^{-1})|) \geqslant \frac{1}{2}|a_0||z|^n$$

при $|z| > \delta^{-1}$. Следовательно, осталось выбрать любое вещественное число $r > \delta^{-1}$, для которого было бы выполнено неравенство

$$|a_0|r^n > 2|a_n|.$$

$\square$

Следствие 1 (лемма Коши о минимуме). *Для каждого многочлена $f \in \mathbb{C}[z]$ существует $z_0 \in \mathbb{C}$ такое, что*

$$|f(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|.$$

Доказательство. В самом деле, непрерывная функция $|f(z)|$ принимает в круге

$$D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$$

минимальное значение, то есть существует $z_0 \in D_r$ такое, что

$$|f(z_0)| = \inf_{z\in D_r} |f(z)|.$$

Но так как

$$|f(z_0)| \leqslant |f(0)|,$$

а по доказанной лемме имеет место неравенство

$$|f(0)| \leqslant \inf_{z\in\mathbb{C}\setminus D_r} |f(z)|,$$

то

$$|f(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|.$$

$\square$

Лемма 2. *Пусть k — любое целое число $\geqslant 1$, и пусть $h \in \mathbb{C}[z]$ — многочлен с $h(0) \neq 0$.*

Тогда для каждого $a \in \mathbb{C}^*$ найдется такое $b \in \mathbb{C}$, что

$$|a + b^k h(b)| < |a|.$$

Доказательство. Будем исходить из факта непрерывности многочлена h: существует $\delta > 0$ такое, что при $|z| < \delta$ имеет место неравенство

$$|h(z) - h(0)| < |h(0)|/2.$$

Это позволяет нам получить оценку для

$$a + z^k h(z) = a + h(0)z^k + z^k(h(z) - h(0)) :$$

$$|a + z^k h(z)| \leqslant |a + h(0)z^k| + \frac{1}{2}|h(0)| \cdot |z|^k \qquad (*)$$

из круга $|z| < \delta$.

Выберем теперь комплексное число $b \in \mathbb{C}$, для которого

$$h(0)b^k = -ta, \quad 0 < t < 1$$

(ниже на вещественное число t будут наложены дополнительные ограничения).

В качестве b достаточно взять любой корень степени k из числа

$$-tah(0)^{-1} \neq 0.$$

Получаем
$$|a+h(0)b^k| = (1-t)|a|$$
и
$$|h(0)| \cdot |b|^k/2 = t|a|/2,$$
что в соединении с $(*)$ приведет к нужному неравенству, так как $|b| < \delta$.

Мы обеспечим выполнение этого условия, наложив на
$$t = -h(0)a^{-1}b^k$$
ограничение
$$t < |h(0)a^{-1}|\delta^k.$$
Итак, подставив в $(*)$ значение $z = b$, $|b| < \delta$, получаем окончательно
$$|a + b^k h(b)| \leqslant (1-t)|a| + \frac{1}{2}t|a| = \left(1 - \frac{1}{2}t\right)|a| < |a|.$$

$\square$

Следствие 2 (лемма Даламбера–Аргана). *Пусть $f(z)$ — многочлен положительной степени над $\mathbb{C}$.*

Тогда каждой точке $c \in \mathbb{C}$ такой, что $f(c) \neq 0$, отвечает точка $c' \in \mathbb{C}$, для которой

$$|f(c')| < |f(c)|.$$

Доказательство. Для доказательства многочлен $f(z+c)$, подобно $f(z)$ не являющийся константой, разложим по степеням z:

$$f(z+c) = f(c) + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \cdots + b_n z^n, \quad b_k \neq 0.$$

Другими словами,

$$f(z+c) = f(c) + z^k h(z),$$

где

$$h(z) = b_k + b_{k+1} z + \cdots + b_n z^{n-k}, \quad h(0) \neq 0.$$

Подставив в формулировку леммы значение

$$a = f(c) \neq 0,$$

мы можем утверждать существование такого $b \in \mathbb{C}$, что при $c' = b + c$ будет выполнено требуемое неравенство:

$$|f(c')| = |f(b+c)| = |f(c) + b^k h(b)| < |f(c)|.$$

$\square$

Окончание доказательства основной теоремы.

По следствию к первой лемме существует такая точка $z_0 \in \mathbb{C}$, что $|f(z_0)| \leqslant |f(z)|$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Если $f(z_0) \neq 0$, то как утверждает следствие второй леммы, найдется такая точка $z_0' \in \mathbb{C}$, что

$$|f(z_0')| < |f(z_0)|$$

— противоречие.