ЛЕКЦИЯ 22 (короткая)

РАЗЛОЖЕНИЕ НА НЕПРИВОДИМЫЕ В $\mathbb{R}[x]$

РАЗЛОЖЕНИЕ НА НЕПРИВОДИМЫЕ МНОЖИТЕЛИ В $\mathbb{R}[x]$

Из основной теоремы алгебры следует, что каждый многочлен f степени n в $\mathbb{C}[x]$ может быть записан, и притом единственным образом (с точностью до перестановки множителей), в виде

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n),$$

где $a \neq 0$, $c_1, \ldots, c_n$ — комплексные числа. Пусть теперь

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

— нормализованный многочлен с вещественными коэффициентами $a_, \ldots, a_n$ и c — какой-то его комплексный корень:

$$c = u + iv, \quad v \neq 0.$$

Применяя к соотношению $f(c) = 0$ автоморфизм комплексного сопряжения, получим $f(\overline{c}) = 0$, поскольку $\overline{a}_i = a_i$. Таким образом, $f(x)$ делится на многочлен второй степени

$$\begin{aligned} g(x) = (x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} = \\ = x^2 - 2ux + (u^2 + v^2) \end{aligned}$$

с вещественными коэффициентами и отрицательным дискриминантом

$$D(g) = 4u^2 - 4(u^2 + v^2) = -4v^2 < 0.$$

Как мы знаем, условие $D(g) < 0$ необходимо и достаточно для неприводимости над $\mathbb{R}$ квадратного многочлена $g \in \mathbb{R}[x]$.

Если, далее, k — кратность корня c многочлена $f(x)$ и $l \leqslant k$ — кратность корня‘$\overline{c}$, то $f(x)$ делится на l-ю степень многочлена $g(x)$:

$$f(x) = g(x)^l q(x).$$

Частное двух многочленов из $\mathbb{R}[x]$ также является многочленом из $\mathbb{R}[x]$, причем при $k > l$ элемент $c \in \mathbb{C}$ будет его корнем кратности $k - l$, в то время как $\overline{c}$ корнем не является. Мы видели, однако, что так быть не может. Значит, $k = l$, то есть комплексные корни каждого многочлена с действительными коэффициентами разделяются на пары сопряженных (вместе с кратностями). Так образом, выполняется следующая теорема:

Теорема 1. *Любой нормализованный многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ степени n разлагается единственным образом (с точностью до порядка множителей) в произведение $m \leqslant n$ линейных многочленов $x - c_i$, соответствующих его вещественным корням $c_1, \ldots, c_m$, и $(n - m)/2$ квадратных многочленов, неприводимых над $\mathbb{R}$ и соответствующих парам комплексно сопряженных корней.*

Замечание 1. Таким образом, неприводимый многочлен из $\mathbb{R}[x]$ либо линеен, либо квадратичен с отрицательным дискриминантом.