ЛЕКЦИЯ 5

ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ

ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ И ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА

Введем понятие линейных комбинаций и линейной оболочки.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — векторы пространства $\mathbb{R}^n$ (или некоторого абстрактного линейного пространства U) и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — скаляры (числа). Вектор $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k$ называется *линейной комбинацией* векторов x_i с коэффициентами α_i.

Пусть теперь $y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$ — линейная комбинация тех же векторов x_i с коэффициентами β_i. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta y &= \\ &= \alpha(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k) + \beta(\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k) = \\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)x_1 + \cdots + (\alpha\alpha_k + \beta\beta_k)x_k\end{aligned}$$

— снова линейная комбинация векторов x_i.

Мы видим, что множество V всех линейных комбинаций системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ обладает свойством

$$x, y \in V \Longrightarrow \alpha x + \beta x \in V$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. В частности, нулевой вектор всегда содержится в V.

Обычно такое V обозначают символом $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$ и называют *линейной оболочкой* системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Говорят еще, что оболочка $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ *натянута* на $x_1, \ldots, x_k$ или *порождена* векторами $x_1, \ldots, x_k$.

Можно определить линейную оболочку любого подмножества $S \subset \mathbb{R}^n$ ($S \subset U$), понимая под $\langle S \rangle$ совокупность всех линейных комбинаций конечных систем векторов из S. Ясно, что если V — линейная оболочка в $\mathbb{R}^n$ (или в U), то $\langle V \rangle = V$: любая линейная комбинация векторов из V принадлежит V. В частности,

$$S \subset V \Longrightarrow \langle S \rangle \subset V,$$

т. е. линейную оболочку $\langle S \rangle$ можно определить как пересечение всех оболочек, содержащих данное множество S векторов из $\mathbb{R}^n$:

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset V} V.$$

На первый взгляд не очевидно, что стоящее в правой части выражения пересечение $\cap V$ какого-то множества оболочек будет линейной оболочкой. Но если $x, y \in \cap V$, то $x, y \in V$ для каждой оболочки V, входящей в множество. Значит, $\alpha x + \beta y \in V$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а это и дает нужное включение $\alpha x + \beta y \in \cap V$. Напротив, объединение $U \cup V$ оболочек U и V, вообще говоря, не является оболочкой, как показывает хотя бы пример

$$U = \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{(0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

в $\mathbb{R}^2$.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Система векторов $x_1, \dots, x_k$ пространства $\mathbb{R}^n$ (или произвольного абстрактного линейного пространства U) называется *линейно зависимой*, если найдутся k чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, одновременно равных нулю и таких, что

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0.$$

Будем говорить, что такая линейная зависимость *нетривиальна*. Если же

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0,$$

то векторы $x_1, \dots, x_k$ называются *линейно независимыми*.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ так называемые *единичные векторы*

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Каждый вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ однозначно записывается в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Поэтому

$$\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle.$$

Понятно, что единичные векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы.

Один вектор $x \neq 0$, очевидно, тоже линейно независим.

Понятно также, что свойство линейной зависимости/независимости никак не связано с порядком векторов, так как слагаемые $\alpha_i x_i$ могут переставлены произвольным образом.

Теорема 1. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *система векторов* $\{x_1, \dots, x_k\}$ *с линейно зависимой подсистемой сама линейно зависима;*

(2) *любая часть линейно независимой системы векторов* $\{x_1, \dots, x_k\}$ *линейно независима;*

(3) *среди линейно зависимой системы векторов хотя бы один является линейной комбинацией остальных;*

(4) *если один из векторов системы выражается через остальные, то система линейно зависима;*

(5) *если векторы* $x_1, \dots, x_k$ *линейно независимы, а векторы* $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}$ *линейно зависимы, то* x_{k+1} *— линейная комбинация векторов* $x_1, \dots, x_k$*;*

(6) *если векторы* $x_1, \dots, x_k$ *линейно независимы и вектор* x_{k+1} *нельзя через них выразить, то система* $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}$ *линейно независима.*

Доказательство. (1) Пусть, например, первые s векторов $x_1, \dots, x_s$, $s < k$, линейно зависимы, т. е.

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_s x_s = 0,$$

где не все α_i равны нулю. Положив тогда $\alpha_{s+1} = \dots = \alpha_k = 0$, получим нетривиальную линейную зависимость

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_s x_s + \alpha_{s+1} x_{s+1} + \dots + \alpha_k x_k = 0.$$

Утверждение (2) непосредственно следует из (1), рассуждением от противного.

(3) Пусть, например, $\alpha_k \neq 0$ в соотношении. Тогда

$$x_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}x_1 - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}x_{k-1}.$$

(4) Пусть, например,

$$x_k = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{k-1}x_{k-1}.$$

Положив $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$, $\alpha_k = -1$, придем к нужному соотношению с коэффициентом $\alpha_k \neq 0$.

(5) Нетривиальное соотношение

$$\beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + \beta x_{k+1} = 0$$

с $\beta \neq 0$ дает в силу (3) то, что нужно. Если, однако, $\beta = 0$, то $\beta_1 = \dots = \beta_k = 0$, поскольку $x_1, \dots, x_k$ по условию линейно независимы.

Утверждение (6) непосредственно следует из (5). $\square$

БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ

Определение 1. Пусть V — ненулевая линейная оболочка в $\mathbb{R}^n$ (или в произвольном линейном пространстве U). Система векторов $x_1, \ldots, x_r \in V$ называется *базисом* для V (или в V), если она линейна независима и ее линейная оболочка совпадает с V:

$$\langle x_1, \ldots, x_r \rangle = V.$$

Из определения базиса и линейной оболочки системы векторов следует, что каждый вектор $x \in V$ записывается единственным образом в виде

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r.$$

Коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ называются координатами вектора x в базисе $x_1, \ldots, x_r$.

Как мы уже видели, линейно независимые единичные векторы порождают $\mathbb{R}^n$. Значит, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис пространства $\mathbb{R}^n$. Но этот так называемый *стандартный* базис — далеко не единственный базис в $\mathbb{R}^n$.

Например, векторы

$$e_1 = e_1, \quad e_2' = e_1 + e_2,$$
$$e_3' = e_1 + e_2 + e_3, \quad \ldots, \quad e_n' = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$$

тоже составляют базис пространства $\mathbb{R}^n$.

С другой стороны, пока не ясно, каждая ли линейная оболочка в $\mathbb{R}^n$ обладает базисом, а если да, то будет ли количество базисных векторов постоянным.

Ответы на оба вопроса оказываются положительными, рассуждения будут основаны на следующей лемме.

Лемма 1 (основная лемма о линейной зависимости)**.** *Пусть V — линейная оболочка в $\mathbb{R}^n$ с базисом $x_1, \dots, x_r$ и $y_1, \dots, y_s$ — линейно независимая система векторов из V. Тогда $s \leqslant r$.*

Доказательство. Как и все векторы из V, векторы $y_1, \dots, y_s$ являются линейными комбинациями базисных векторов. Пусть

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{r1}x_r,\\
y_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{r2}x_r,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_s &= a_{1s}x_1 + a_{2s}x_2 + \dots + a_{rs}x_r,
\end{aligned}
$$

где a_{ij} — какие-то скаляры (являясь координатами векторов y_j, они однозначно определены, но это пока несущественно для нас).

Рассуждаем от противного. Предположим, что $s > r$. Составим линейную комбинацию векторов y_j с коэффициентами α_j:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_s y_s =\\
&= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1s}\alpha_s)x_1 + \dots + (a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \dots + a_{rs}\alpha_s)x_r
\end{aligned}
$$

и рассмотрим систему из r линейных уравнений с s неизвестными

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rs}x_s = 0.
\end{cases}
$$

Так как по предположению $s > r$, то наша система обладает ненулевым решением $(x_1^0, \dots, x_s^0)$.

Мы приходим к нетривиальной линейной зависимости

$$\alpha_1^0 y_1 + \alpha_2^0 y_2 + \dots + \alpha_s^0 y_s = 0,$$

наличие которой, однако, противоречит условию леммы.

Значит, $s \leqslant r$. $\square$

Теорема 2. *Каждая ненулевая линейная оболочка* $V \subset \mathbb{R}^n$ *обладает конечным базисом. Все базисы оболочки* V *состоят из одинакового числа* $r \leqslant n$ *векторов (это число называется размерностью оболочки* V *и обозначается* $\dim_{\mathbb{R}} V$ *или просто* $\dim V$*).*

Доказательство. В соответствии с условием V содержит хотя бы один ненулевой вектор x_1. Пусть мы нашли в V линейно независимую систему векторов $x_1, \ldots, x_k$. Если линейная оболочка $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ не совпадает с V, то выберем в V вектор $x_{k+1} \notin \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$. Другими словами, x_{k+1} не является линейной комбинацией векторов $x_1, \ldots, x_k$. По предыдущей теореме, пункту (6), система $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$ оказывается линейно независимой.

Мы могли бы продолжать неограниченно процесс расширения линейно независимой системы, но все ее векторы x_i лежат в $\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$, а по только что доказанной лемме линейно независимая система в $\mathbb{R}^n$ содержит не более n векторов.

Значит, при некотором натуральном $r \leqslant n$ линейно независимая система

$$x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_r \in V$$

станет *максимальной*, то есть мы получим линейно зависимую систему $x_1, \ldots, x_r, x$, каков бы ни был вектор $x \neq 0$ из V.

Далее, будем иметь включение

$$x \in \langle x_1, \ldots, x_r \rangle.$$

Значит,

$$V = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle,$$

и векторы $x_1, \ldots, x_r$ составляют базис для V.

Предположим теперь, что $y_1, \ldots, y_s$ — еще один базис для V.

По основной лемме о линейной зависимости мы имеет неравенство $s \leqslant r$. Поменяв местами системы $x_1, \ldots, x_r$ и $y_1, \ldots, y_s$, мы получим по той же самой лемме неравенство $s \leqslant r$.

Значит, $s = r$ и теорема доказана. $\square$

Итак, с каждой линейной оболочкой V в $\mathbb{R}^n$ ассоциируется целое положительное число $r \leqslant n$, которое мы назвали ее размерностью: $r = \dim V$. Этот важный числовой параметр пространства можно характеризовать разными другими способами.

Один из вариантов определения размерности основан на понятии ранга система векторов.

Именно, если $\{x_1, x_2, \dots\}$ — какая-то, возможно, бесконечная, система векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$, то, как мы знаем, размерность линейной оболочки $\langle x_1, \dots\rangle$ не превосходит n.

Ее называют *рангом* системы $\{x_1, x_2, \dots\}$:

$$\operatorname{rank}\{x_1, x_2, \dots\} = \dim\langle x_1, x_2, \dots\rangle.$$

В случае $V = \{0\}$ принято считать $\dim V = 0$.