ЛЕКЦИЯ 8

КОЛЬЦО КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

НЕВЫРОЖДЕННЫЕ И ОБРАТИМЫЕ МАТРИЦЫ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МАТРИЦЫ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

КВАДРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

Множество всех квадратных матриц (a_{ij}) порядка n с вещественными коэффициентами a_{ij} обычно обозначается через $M_n(\mathbb{R})$ или просто M_n.

Как мы уже упоминали, можно говорить о векторном пространстве $M_n(\mathbb{R})$.

Плюс к этому на таких матрицах определена операция умножения, подчиненная законам ассоциативности и дистрибутивности относительно сложения.

Определение 1. Говорят, что квадратные матрицы фикисированного порядка n образуют *матричное (ассоциативное) кольцо*. С учетом легко проверяемый правил $\lambda AB = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ умножения на скаляры $\lambda \in \mathbb{R}$ множество $M_n(\mathbb{R})$ называют также *алгеброй матриц* над $\mathbb{R}$.

Обратим внимание на единичную матрицу $E = (\delta_{kj})$, где

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

— *символ Кронекера*.

Очевидно, что $\operatorname{rank} E = n$.

Правило умножения матриц показывает, что справедливы соотношения

$$EA = AE = A \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Более общо,

$$(\lambda E)A = A(\lambda E) = \lambda A,$$

где

$$\lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

— скалярная матрица.

Таким образом, умножение матрицы A на скаляр равносильно умножению на скалярную матрицу.

Мы увидели, что скалярная матрица перестановочна с любой другой квадратной матрицей.

Теорема 1. *Матрица из M_n, перестановочная со всеми матрицами в M_n, должна быть скалярной.*

Доказательство. Введем матрицу E_{ij}, у которой на месте (i, j) стоит единица, а во всех остальных — нули. Если $Z = (z_{ij})$ — матрица, о которой идет речь в теореме, то она перестановочна, в частности, со всеми E_{ij}:

$$ZE_{ij} = E_{ij}Z, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Перемножая матрицы в левой и правой частях этого равенства, м получим матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & z_{1i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & z_{2i} & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & z_{ni} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ z_{j1} & z_{j2} & \dots & z_{jn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

с единственным ненулевым j-м столбцом и соответственно с единственной ненулевой i-й строкой.

Их сравнение немедленно приводит к соотношениям $z_{ki} = 0$ при $k \neq i$ и $z_{ii} = z_{jj}$.

Меняя i и j, получаем требуемое. $\square$

ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

Для данной матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ можно попробовать найти такую матрицу $A' \in M_n(\mathbb{R})$, чтобы выполнялись соотношения

$$AA' = E = A'A.$$

Сразу же заметим, что

$$AA' = E = A''A \Longrightarrow A'' = A'.$$

Действительно,

$$A'' = A''E = A'(AA') = (A''A)A' = EA' = A'.$$

Таким образом, матрица A', если она существует, единственна. Ее называют матрицей, *обратной* к A, и обозначают через A^{-1}.

Если обратная матрица существует, то говорят, что A *обратима*.

Определение 2. Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ называется *невырожденной*, если система ее строк (а тем самым и столбцов) линейно независима, т. е. $\operatorname{rank} A = n$. Если $\operatorname{rank} A < n$, то матрица A называется *вырожденной*.

Теорема 2. *Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ обратима тогда и только тогда, когда она невырожденна.*

Доказательство. (1) Если $AB = E$ (или $BA = E$), то по теореме о ранге произведения имеем

$$n = \operatorname{rank} E = \operatorname{rank} AB \leqslant \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\} \leqslant n,$$

откуда $\operatorname{rank} A = n$.

(2) Если $\operatorname{rank} A = n$, то

$$\langle E^{(1)}, \ldots, E^{(n)} \rangle = \mathbb{R}^n = \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle,$$

откуда следует, что

$$E^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} A^{(i)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

причем коэффициенты a'_{ij}, составляющие матрицу

$$A' = (a'_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}),$$

определены однозначно.

По правилу умножения матриц эти соотношения переписываются как

$$E^{(j)} = AA'^{(j)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

откуда

$$E = (E^{(1)}, \dots, E^{(n)}) = (AA'^{(1)}, \dots, AA'^{(n)}) = AA'.$$

Здесь мы интерпретировали матрицы E и AA' как объединения отвечающих им столбцов.

Заметим теперь, что вместе с A невырожденной является и транспонированная матрица A^T. Поэтому в силу доказанного найдется матрица B такая, что $A^T \cdot B = E$. Полагая $A'' = B^T$, найдем

$$E = E^T = (A^T B)^T = B^T (A^T)^T = A'' A.$$

Итак,

$$AA' = E = A''A,$$

откуда получается, что $A'' = A' = A^{-1}$. □

Следствие 1. *Если B и C — невырожденные квадратные матрицы порядков m и n соответственно, A — произвольная $m \times n$-матрица, то*

$$\operatorname{rank} BAC = \operatorname{rank} A.$$

Доказательство. В силу предыдущих теорем

$$\operatorname{rank} BAC \leqslant \operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} BA(CC^{-1}) = \\ = \operatorname{rank} (BAC)C^{-1} \leqslant \operatorname{rank} BAC,$$

откуда

$$\operatorname{rank} BAC = \operatorname{rank} BA.$$

Аналогично устанавливается равенство

$$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A.$$

$\square$

Следствие 2. *Если $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ и $AB = E$ или $BA = E$, то $B = A^{-1}$.*

Доказательство. Мы уже показывали в теореме, что если $AB = E$, то $\operatorname{rank} A = n$, то есть A невырожденна и, следовательно, обратима. $\square$

Следствие 3. *Если* $A, B, \ldots, C, D$ *— невырожденные* $n \times n$*-матрицы, то произведение*

$$AB \ldots CD$$

также невырожденно и

$$(AB \ldots CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1} \ldots B^{-1}A^{-1}.$$

Доказательство. Невырожденность произведения

$$G = AB \ldots CD$$

видна из следствия 2, а равенство

$$G^{-1} = D^{-1}C^{-1} \ldots B^{-1}A^{-1}$$

проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned} G(D^{-1}C^{-1} \ldots B^{-1}A^{-1}) &= AB \ldots C(DD^{-1})C^{-1} \ldots B^{-1}A^{-1} = \\ &= AB \ldots (CC^{-1}) \ldots B^{-1}A^{-1} = \cdots = E. \end{aligned}$$

$\square$

КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ МАТРИЦ

Как и в предыдущей лекции, обозначим через E_{st} матрицу размера $m \times m$, в которой на месте (s,t) стоит единица, а все остальные — нули (такие матрицы называют *матричными единицами*).

Рассмотрим в $M_n(\mathbb{R})$ так называемые *элементарные матрицы* следующих типов:

$$F_{s,t} = E - E_{ss} - E_{tt} + E_{st} + E_{ts} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad s \neq t;$$

$$F_{s,t}(\lambda) = E + \lambda E_{s,t} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ \ldots\ldots & 1 & \ldots & \lambda & \ldots \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad s \neq t;$$

$$F_s(\lambda) = E + (\lambda - 1)E_{ss} = \operatorname{diag}[1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1], \quad \lambda \neq 0.$$

Пусть A — произвольная $m \times n$-матрица.

Если мы умножим ее слева на $F_{s,t}$, то у нее поменяются местами строчки с номерами s и t, то есть есть к ней применится элементарное преобразование над строками типа (I). Если же мы умножим ее справа на $F_{s,t}$, то у матрицы A поменяются местами столбцы с номерами s и t.

Умножив матрицу A слева на матрицу $F_{s,t}(\lambda)$, мы применим к ее строкам элементарное преобразование типа (II), то есть прибавим к одной строке другую, умноженную на λ.

Точно так же мы получим элементарное преобразование над столбцами, если умножим A на $F_{s,t}(\lambda)$ справа.

Наконец, посмотрим, что произойдет, если мы умножим матрицу A слева на матрицу $F_s(\lambda)$. Каждая срока умножится на соответствующий диагональный элемент, то есть все строки, кроме s-й, не изменятся, а s-ая строчка умножится на λ. Такой преобразование, когда некоторая строка матрицы умножается на ненулевое число, назовем *элементарным преобразованием типа* (III).

При умножении матрицы A справа на $F_s(\lambda)$ мы получим умножение s-го столбца на λ.

Очевидно, что элементарные преобразования третьего типа тоже обратимы.

Заметим, что элементарными преобразованиями над строками мы можем привести матрицу к ступенчатому виду, где в углах будут стоять единицы.

После этого элементарными преобразованиями второго типа над столбцами можно избавиться от ненулевых чисел, кроме этих угловых единиц, а потом, после того, как поменяем столбики местами, у нас останется матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для любой матрицы A существует набор элементарных матриц $P_1, \dots, P_k$, $Q_1, \dots, Q_l$ таких, что

$$P_k P_{k-1} \dots P_1 A Q_1 Q_2 \dots Q_l = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы P_i имеют размер $m \times m$, матрицы Q_j — $n \times n$.

Обратные матрицы для элементарных матриц:

1) $(F_{s,t})^{-1} = F_{s,t}$;

2) $F_{s,t}(\lambda)^{-1} = F_{s,t}(-\lambda)$;

3) $F_s(\lambda) = F_s(\lambda^{-1})$.

Отсюда получается, что матрицы $P = P_k P_{k-1} \dots P_1$ и $Q = Q_! Q_2 \dots Q_l$ тоже обратимы:

$$P^{-1} = P_1^{-1} \dots P_{k-1}^{-1} P_k^{-1}, \quad Q^{-1} = Q_l^{-1} \dots Q_2^{-1} Q_1^{-1}.$$

Две матрицы A, B размера $m \times n$ назовем *эквивалентными* и запишем $A \sim B$, если найдутся такие невырожденные матрицы P, Q порядков m и n соответственно, что $B = PAQ$.

Как легко понять, $\sim$ является отношением эквивалентности:

(1) $A \sim A$ ($P = E_m$, $Q = E_n$);

(2) $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$, так как $B = PAQ \Longrightarrow A = P^{-1}BQ^{-1}$;

(3) $B = P'AQ'$, $C = P''BQ'' \Longrightarrow C = (P''P')A(Q'Q'')$.

Согласно общему принципу, связанному с отношениями эквивалентности, множество всех $m \times n$-матриц разбивается отношением $\sim$ на непересекающиеся классы эквивалентных матриц.

Так как ранги эквивалентных матриц равны, то в качестве представителей можно брать матрицы вида

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили следующее утверждение:

Теорема 3. *Множество матриц размера $m \times n$ разбивается на*

$$p = \min(m, n) + 1$$

классов эквивалентности.

Все матрицы ранга r попадают в один класс с представителем

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следствие 4. *Всякая невырожденная $n \times n$-матрица записывается в виде произведения элементарных матриц.*

Доказательство. Действительно, все невырожденные матрицы порядка n попадают в один класс с представителем — единичной матрицей, поскольку их ранги равны n.

Соответствующее соотношение

$$P_k P_{k-1} \dots P_1 A Q_1 Q_2 \dots Q_l = E,$$

переписанное в виде

$$A = P_1^{-1} \dots P_{k-1}^{-1} P_k^{-1} Q_l^{-1} \dots Q_2^{-1} Q_1^{-1},$$

дает нужное утверждение. □