ЛЕКЦИЯ 9

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ

ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ОБЪЕМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Заметим, что в условиях предыдущей лекции матрица A^{-1} ищется довольно просто:

$$A^{-1} = Q_1 Q_2 \dots Q_l P_k P_{k-1} \dots P_1 = QP.$$

Заметим теперь, что если бы мы стартовали в предыдущем пункты с невырожденной матрицы, то могли бы дойти до единичной матрицы только лишь преобразованиями над строками.

Действительно, начнем приводить матрицу к ступенчатому виду преобразованиями над строками.

Очевидно, что ступенчатый вид должен оказаться верхнетреугольным с ненулевыми числами на диагонали, так как если возникнет хотя бы одна ступенька ширины > 1, то в конце обязательно появится нулевая строка.

Придя к верхнетреугольному виду, преобразованиями третьего типа мы получим на диагонали единицы, после чего вычтем последнюю строчку с подходящими коэффициентами из всех остальных строк, обнулив последние элементы во всех строках, кроме последней. Далее вычтем предпоследнюю строчку из всех предыдущих строк с подходящими коэффициентами, откуда получим во всех строках, кроме предпоследней, нули на предпоследнем месте.

Продложая эту процедуру, дойдем до единичной матрицы.

Теперь перейдем к нахождению обратной матрицы.

Сразу рассмотрим не матрицу A, а расширенную матрицу $(A \mid E)$ размера $n \times 2n$ и будем элементарными преобразованиями над строками (то есть умножением слева на элементарные матрицы) приводить ее к единичной.

Возникнет цепочка

$$(A|E) \mapsto (P_1 A | P_1 E) \mapsto \dots \\ \mapsto (P_k \dots P_2 P_1 A | P_k \dots P_2 P_1 E) = (E|A').$$

Она оборвется на k-м шаге, когда в левой половине расширенной матрицы окажется единичная матрица. Это будет означать $(P_k \dots P_2 P_1)A = E = PA$, то есть $P = A^{-1}$.

В правой половине расширенной матрицы как раз будет стоять матрица A^{-1}.

Таким образом, мы сформулировали алгоритм нахождения обратной матрицы.

Пример 1. Пусть
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -2 & 1 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ

Система уравнений с матрицей A размера $m \times n$ и столбцов свободных членов $B \in \mathbb{R}^m$ может быть записана коротко в виде

$$AX = B,$$

где $X = [x_1, \ldots, x_n]$ — столбец высоты n.

Представив, что $m = n$ и квадратная матрица A является невырожденной, мы получим, и притом единственное, решение этой системы, умножая обе части матричного соотношения слева на A^{-1}:

$$X = EX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Эта удобная символическая запись решений определенной системы не избавляет нас от вычислений, так как матрица A^{-1} заранее не дана.

Теперь заметим, что если X_0 — это решение системы $AX = B$, а Y_0 — решение соответствующей однородной системы $AX = 0$, то для $X_1 = X_0 + Y_0$ имеем

$$AX_1 = A(X_0 + Y_0) = AX_0 + AY_0 = B + 0 = B,$$

а если X_1 и X_2 — два решения системы $AX = B$, то для разности $Y_0 = X_1 - X_2$ имеем

$$AY_0 = A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = 0,$$

то есть сумма решений полной системы и однородной — это решение полной системы, а разность двух решений полной системы — это решение однородной системы.

Таким образом, чтобы найти все решения полной системы линейных уравнений $AX = B$, нужно найти одно частное ее решение X_0 и все решения соответствующей однородной системы, после чего любое решение есть сумма X_0 и решения однородной системы.

В связи с этим изучим, какие бывают решения у однородной линейной системы

$$AX = 0.$$

Мы уже знаем, что если $X^{(1)}, X^{(2)}$ — решения нашей однородной системы (ЛОС), то любая из линейная комбинация тоже будет решением:

$$A(\alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)}) = \alpha_1 AX^{(1)} + \alpha_2 AX^{(2)} = 0.$$

Поэтому можно говорить о *пространстве решений* ЛОС — линейной оболочке

$$V_A = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Пусть $s = \dim V_A$, $r = \operatorname{rank} A$. По определению $s \leqslant n$, $r \leqslant \min(m, n)$.

Какая связь существует между s и r?

Теорема 1. *Имеет место равенство $r + s = n$.*

Доказательство. Выберем базис $X^{(1)}, \ldots, X^{(s)}$ пространства V_A и дополним его до базиса $X^{(1)}, \ldots, X^{(s)}, X^{(s+1)}, \ldots, X^{(n)}$ всего пространства $\mathbb{R}^n$.

Это всегда можно сделать, так как если множество векторов было линейно независимо, но не являлось базисом, то можно было выбрать новый вектор, который не выражался через векторы этого множество, и добавить к нашему множеству, после чего новое множество векторов все равно осталось бы линейно независимым. Мы знаем, что множество линейно независимых векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ не может содержать более n векторов, то есть процедура добавления оказывается конечной.

Теперь для любого вектора

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X^{(i)} \in \mathbb{R}^n$$

имеем

$$AX = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i AX^{(i)} = \alpha_{s+1} AX^{(s+1)} + \cdots + \alpha_n AX^{(n)}.$$

Таким образом, линейная оболочка столбцов

$$V(A) = \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle = \{x_1 A^{(1)} + \cdots + x_n A^{(n)} \mid x_i \in \mathbb{R}^n\} = \\ = \{AX \mid X \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m,$$

называемая *пространством столбцов* матрицы A, совпадает с линейной оболочкой

$$\langle AX^{(s+1)}, \ldots, AX^{(n)} \rangle.$$

В частности,

$$r = \dim V(A) \leqslant n - s.$$

Но векторы $AX^{(s+1)}, \ldots, AX^{(n)}$ линейно независимы, так как из

$$0 = \sum_{k \geqslant s+1} \beta_k A X^{(k)} = A \left(\sum_{k \geqslant s+1} \beta_k X^{(k)} \right)$$

следует

$$\sum_{k \geqslant s+1} \beta_k X^{(k)} \in V_A,$$

а это в силу выбора $X^{(s+1)}), \ldots, X^{(n)}$ возможно только при $\beta_{s+1} = \cdots = \beta_n$. Значит, $r = n - s$. $\square$

Чтобы найти базис пространства V_A, выберем в A r базисных столбцов одним из способов — например, приведением A к ступенчатому виду.

Перестановкой столбцов или, что равносильно, перенумерацией неизвестных, можно добиться, чтобы базисными были первые r столбцов $A^{(1)}, \ldots, A^{(r)}$.

При этом в новой системе неизвестных $x'_1, \ldots, x'_n$ главными неизвестными станут $x'_1, \ldots, x'_r$.

Любая система из $r+1$ столбцов $A^{(1)}, \ldots, A^{(r)}, A^{(r+k)}$, $k > 0$, будет линейно зависимой, поэтому можно выписать систему соотношений

$$x_1^{(k)} A^{(1)} + x_2^{(k)} A^{(2)} + \cdots + x_r^{(k)} A^{(r)} + A^{(r+k)} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-r.$$

Векторы-столбцы

$$\left(\begin{array}{ccc} X^{(1)} & = & [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}, 1, 0, \ldots, 0], \\ X^{(2)} & = & [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_r^{(2)}, 0, 1, \ldots, 0], \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ X^{(n-r)} & = & [x_1^{(n-r)}, x_2^{(n-r)}, \ldots, x_r^{(n-r)}, 0, 0, \ldots, 1] \end{array}\right)$$

в количестве $n-r$ штук, очевидно, линейно независимы (из-за специального вида своих последних $n-r$ компонент) и, будучи решениями ЛОС, составляют базис пространства V_A всех ее решений.

Понятно, что решение $X^{(k)}$ получается, если новым (штрихованным) свободным неизвестным придать значения

$$x'_{r+1} = 0, \ldots, x_{r+k} = 1, \ldots, x'_n = 0.$$

Любой базис пространства решений однородной системы $AX = 0$ ранга r называется *фундаментальной системой решений.*

Выписанную систему называют еще *нормальной* фундаментальной системой.

Как мы уже поняли, ее ранг

$$s = \dim V_A = n - r$$

равен числу свободных неизвестных линейной системы.

ОБЪЕМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Ничто не мешает сейчас ввести общее понятие определителя, обобщающее определители для матриц размера 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

и матриц размера 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Однако мы попытаемся на время забыть о нашей задаче и обратимся к вычислению объемов простейших геометрических фигур — параллелепипедов.

Квадратной матрице (a_{ij}) порядка n поставим в соответствие *параллелепипед*

$$\Pi(A) = \Pi(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}),$$

ребра которого задаются столбцами матрицы $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$, т. е. векторами (или точками)

$$A^{(j)} = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}] \in \mathbb{R}^n.$$

Под $\Pi(A)$ нужно понимать подмножество в $\mathbb{R}^n$, состоящее из всех точек вида

$$x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)}, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1.$$

При $n = 1$ параллелепипед — это привычный нам отрезок, при $n = 2$ — параллелограмм, при $n = 3$ — обычный трехмерный параллелепипед.

Объем $v(\Pi(A))$ n-мерного параллелепипеда определяется по индукции как произведение объема

$$v(\Pi(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n-1)}))$$

$(n-1)$-мерного основания в $\mathbb{R}^{n-1}$ и длины h перпендикуляра $A^{(n)}P$, опущенного на гиперплоскость этого основания из точки $A^{(n)}$.

Под объемом отрезка понимается его длина, под объемом параллелограмма — его площадь. Не будем сейчас уходить в точные определения и подробности, так как это не относится напрямую к теме.

Пусть в двумерном случае есть параллелограмм, задаваемый матрицей

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тогда его площадь равна удвоенной площади треугольника, вершинами которого являются точки $(0,0)$, (a,b) и (c,d).

Мы знаем, что площадь треугольника равна половине произведения длин двух соседних его сторон на синус угла между ними, то есть площадь параллелограмма —

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\sin\varphi.$$

При этом угол φ равен разности углов, которые образуют с осью Ox векторы (a,b) и (c,d), косинусы и синусы этих углов равны

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}},\ \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}.$$

При этом известно, что

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha.$$

Подставим все это в формулу:

$$\begin{aligned}&\Pi(A)=\\&=\left|\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}\right)\right|=\\&\qquad\qquad=|ad-bc|.\end{aligned}$$

Получился модуль двумерного определителя.

Трехмерную ситуацию не будем разбирать подробно, так как это очень длинно и вычислительно, но тоже получится, что объем параллелепипеда равен модулю определителя.

Соблазнительно было бы сохранить формулы вычисления объема через определитель без оговорок на знак, то есть при любом расположении точек $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$, но это возможно только в том случае, если пользоваться понятием *ориентированного объема* параллелепипеда с допустимыми отрицательными значениями.

В частности, для отрезка с отрицательным концом $a < 0$ ориентированной длиной будет как раз число a.

Для параллелограмма $\Pi(A^{(1)}, A^{(2)})$ площадь берется со знаком плюс, если упорядоченная пара векторов $A^{(1)}, A^{(2)}$ задает ту же ориентацию плоскости, что и базисная пара векторов $(e_1, e_2) = ([1,0],[0,1])$, в противном случае — со знаком минус.

При таком подходе стоит продолжить логику и называть ориентированным объемом параллелепипеда, натянутого на векторы $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$, его объем со знаком, где знак выбирается в зависимости от того, будет ли набор вектор задавать ту же ориентацию пространства, что и обычный упорядоченный базис.

Обратим внимание на проверяемые свойства ориентированного объема параллелепипеда:

(1) $v(\Pi(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(i)}, A^{(i+1)}, \ldots, A^{(n)}) = -v(\Pi(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(i+1)}, A^{(i)}, \ldots, A^{(n)})$;

(2) $v(\Pi(A^{(1)}, \ldots, \lambda A^{(i)} + \mu B^{(i)}, \ldots, A^{(n)}) = \lambda v(\Pi(A^{(1)}, \ldots, A^{(i)}, \ldots, A^{(n)}) + \mu v(\Pi(A^{(1)}, \ldots, B^{(i)}, \ldots, A^{(n)})$;

(3) $v(\Pi([1, 0, 0, \ldots, 0], [0, 1, 0, \ldots, 0], \ldots, [0, 0, 0, \ldots, 0, 1])) = 1$.

Эти свойства легко доказываются по нашему индуктивному построению.

Для нас важным будет то, что ориентированный объем n-мерного параллелепипеда — это функция, удовлетворяющая свойствам (1)–(3).

С этого момента можно будет отвлечься от геометрической составляющей .