Матрица перехода

от старого (упорядоченного) базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к новому $(e'_1, \ldots, e'_n)$ — это матрица, по столбцам которой записаны координаты векторов нового базиса в старом базисе:

$$\begin{cases} e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n \\ e'_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n \\ \ldots \\ e'_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{cases} \iff \boxed{(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C,} \text{ где } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Контрольные вопросы. 1. Невырожденные матрицы и только они могут быть матрицами перехода. 2. Если $(e_1, \ldots, e_n) \xrightarrow{C} (e'_1, \ldots, e'_n) \xrightarrow{D} (e''_1, \ldots, e''_n)$, то $(e'_1, \ldots, e'_n) \xrightarrow{C^{-1}} (e_1, \ldots, e_n)$ и $(e_1, \ldots, e_n) \xrightarrow{CD} (e''_1, \ldots, e''_n)$.

Как найти матрицу перехода, зная координаты векторов обоих базисов $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(e'_1, \ldots, e'_n)$ пространства K^n в стандартном базисе. Запишем координаты векторов первого базиса по столбцам матрицы A, а второго — по столбцам матрицы B рядом с A. Получим $(n \times 2n)$-матрицу $(A|B)$, которую приведём к главному ступенчатому виду. Так как матрица A невырожденная, то мы получим на её месте единичную матрицу E: $(A|B) \rightsquigarrow (E|C)$. Тогда C — искомая матрица.

Обоснование: столбцы матрицы C выражаются через столбцы матрицы E *точно так же*, как столбцы матрицы B через столбцы матрицы A (почему?), то есть с помощью искомой матрицы перехода.

Изменение координат векторов при переходе к другому базису. Пусть $X = (x^1, \ldots, x^n)^t \in K^n$ — столбец координат вектора $x \in V$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$, т. е.

$$x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n = (e_1, \ldots, e_n)X$$

— произведение матрицы $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{M}_{1\times n}(V)$ на матрицу $X \in \mathrm{M}_{n\times 1}(K)$. Далее пусть X' — столбец координат вектора x в базисе $(e'_1, \ldots, e'_n)$ и пусть C — матрица перехода $(e_1, \ldots, e_n) \to (e'_1, \ldots, e'_n)$. Тогда

$$(e_1, \ldots, e_n)X = (e'_1, \ldots, e'_n)X' = (e_1, \ldots, e_n)CX' \iff \boxed{X = CX'.}$$

Матрица линейного оператора

$\mathcal{A}\colon V \to V$ в упорядоченном базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V — это матрица $A \in \mathrm{M}_n(K)$, по столбцам которой стоят координаты образов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$ базисных векторов в том же базисе $e_1, \ldots, e_n$. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \mathcal{A}e_1 = 2e_1 \\ \mathcal{A}e_2 = e_2 \\ \mathcal{A}e_3 = 3e_2 + 2e_3 \\ \mathcal{A}e_4 = e_2 + 5e_4 \end{cases}$$

Как меняется матрица оператора при переходе к другому базису.

Бескоординатная запись	В базисе $(e_1, \ldots, e_n)$	В базисе $(e'_1, \ldots, e'_n)$
$y = \mathcal{A}x$	$Y = AX$	$Y' = A'X'$
$x, y \in V,\ \mathcal{A}\colon V \to V$	$X, Y \in K^n$ — столбцы, $A \in \mathrm{M}_n(K)$	$X', Y' \in K^n$ — столбцы, $A' \in \mathrm{M}_n(K)$

Так как $X = CX'$ и $Y = CY'$, то

$$Y = AX \iff CY' = ACX' \iff CA'X' = ACX' \text{ — для всех } X' \in K^n \text{, откуда}$$

$$CA' = AC \iff \boxed{A' = C^{-1}AC}.$$

Как быстро найти матрицу $C^{-1}AC$? Элементарными преобразованиями: $(C \mid AC) \rightsquigarrow (E \mid C^{-1}AC)$.

Контрольные вопросы. 3. Как меняется матрица оператора при перестановке базисных векторов?
4. Скалярные операторы и только они имеют во всех базисах одну и ту же матрицу (скалярную).
5. Матрицы A и $C^{-1}AC$ имеют одинаковые ранги, определители, следы.

Примеры

1. Рассмотрим оператор $z \mapsto iz$ в пространстве ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. Найдём его матрицы в базисах $(1, i)$ и $(2+i, 3+2i)$.

Решение. Матрица A в базисе $(1, i)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (т. к. $1 \mapsto i$, $i \mapsto i^2 = -1$). Матрица перехода от $(1, i)$ к $(2+i, 3-4i)$ имеет вид $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, откуда получаем матрицу $A' = C^{-1}AC$ нашего оператора в базисе $(2+i, 3+2i)$:

$$(C \,|\, AC) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -8 & -13 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right) = (E \,|\, A').$$

2. Обозначим $r = \sqrt[n]{2}$. Докажем, что числа $1, r, \ldots, r^{n-1}$ образуют базис в расширении $\mathbb{Q}(r)$ поля $\mathbb{Q}$, и найдём матрицу умножения на r в этом базисе.

Решение. Предположим, что $1, r, \ldots, r^{n-1}$ линейно зависимы, т. е. $a_0 + a_1 r + \ldots + a_{n-1}r^{n-1}$ для некоторых $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}$, не равных нулю одновременно. Это значит, что $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ — ненулевой многочлен с корнем r. Но r также корень двучлена $x^n - 2$, неприводимого над $\mathbb{Q}$ по признаку Эйзенштейна. Значит, r — корень НОД $(f(x), x^n - 2)$ — нетривиального делителя $x^n - 2$. Противоречие.

Далее $\mathbb{Q}(r) = \mathbb{Q}[r] = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}r \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}r^{n-1}$, т. к. от иррациональности в знаменателе можно избавить по алгоритму Евклида.

Оператор умножения на r на базисных векторах действует так: $1 \mapsto r \mapsto r^2 \mapsto \ldots r^{n-1} \mapsto r^n = 2$, откуда получаем его матрицу в базисе $(1, r, \ldots, r^{n-1})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. В комплексном пространстве функций $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ (двусторонних последовательностей) рассмотрим линейную оболочку функций $\mathbb{Z} \ni k \mapsto \lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$, где числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}^*$ различны. Докажем, что они образуют её базис (над $\mathbb{C}$) и запишем в нём матрицу *разностного оператора*

$$\Delta\colon f \mapsto \Delta f, \quad (\Delta f)(k) = f(k) - f(k-1).$$

Решение. Столбцы значений этих функций при $k = 0, 1, \ldots, n-1, n$ являются столбцами определителя Вандермонда $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0$, значит, данные строки линейно независимы. Исходные последовательности тем более линейно независимы и образуют базис своей линейной оболочки. Далее

$$\Delta(\lambda^k) = \lambda^k - \lambda^{k-1} = \lambda^{k-1}(\lambda - 1) = \tfrac{\lambda-1}{\lambda}\lambda^k,$$

следовательно, матрица оператора Δ в базисе $(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ имеет диагональный вид $\operatorname{diag}\left(\frac{\lambda_1-1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_k-1}{\lambda_k}\right)$.

Задачи

1. а) Докажите, что числа $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ образуют базис в расширении $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ поля $\mathbb{Q}$. Запишите матрицу умножения на $\sqrt{6}$ в этом базисе.

б) Пусть $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. Докажите, что числа $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ образуют базис в том же расширении. Запишите в этом базисе матрицу оператора $\mathcal{A}\colon a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mapsto a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

в) Докажите, что f является не только линейным оператором, но и гомоморфизмом колец, т. е. $\mathcal{A}(xy) = \mathcal{A}(x)\mathcal{A}(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

2. Докажите, что функции $\mathbb{R} \ni x \mapsto \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx$ образуют базис своей линейной оболочки над $\mathbb{R}$. Напишите матрицу оператора дифференцирования в этом базисе.

3*. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — разные простые числа. Докажите, что $\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

4*. Пусть $\alpha = \sqrt[5]{5}$, $\beta = \sqrt[7]{7}$. Докажите, что числа $1, \alpha, \ldots, \alpha^4, \beta, \ldots, \beta^6$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.