

Задачи для заправки

Листок I: в ожидании комплексных чисел

1. Разложение многочленов на множители. Как догадаться до следующих разложений:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1),$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}x + 1\right) \left(x^2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}x + 1\right),$$

$$x^6 + x^3 + 1 = \left(x^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{9} x + 1\right) \left(x^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{9} x + 1\right) \left(x^2 - 2 \cos \frac{8\pi}{9} x + 1\right)?$$

2. Тригонометрия. Докажите равенства:

а) $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; **б)** $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$; **в)** $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$.

г) Легко понять, что $a^n + a^{-n}$ полиномиально выражается через $a + a^{-1}$ при $n \in \mathbb{N}$, например,

$$a^2 + a^{-2} = (a + a^{-1})^2 - 2, \quad a^3 + a^{-3} = (a + a^{-1})^3 - 3(a + a^{-1}).$$

Оказывается, эта полиномиальная зависимость имеет «тригонометрические корни» — почти так же, с точностью до двойки, $\cos n\varphi$ выражается через $\cos \varphi$:

$$\cos n\varphi = T_n(\cos \varphi) \quad \text{и} \quad \frac{a^n + a^{-n}}{2} = T_n\left(\frac{a + a^{-1}}{2}\right).$$

Например, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$. Многочлены $T_n(x)$ — это знаменитые многочлены Чебышёва (I рода). Как доказать, что зависимость в обоих случаях полиномиальная, и как объяснить, что она одна и та же?

3. Суммы биномиальных коэффициентов. Для $n, k \in \mathbb{N}_0$ определим число сочетаний C_n^k как число способов выбрать k элементов из n , т. е. число k -элементных подмножеств n -элементного множества ($C_n^0 = 1$). Из этого определения следует формула *бинома Ньютона*:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + nx + 1.$$

Поэтому числа C_n^k называются также *биномиальными коэффициентами*.

Основное биномиальное тождество

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$$

позволяет расположить числа сочетаний в *треугольник Паскаля* — бесконечную треугольную таблицу, по бокам которой стоят единицы, а внутри каждое число равно сумме двух выше стоящих. Число C_n^k стоит в n -й строке на k -м месте, если считать с нуля.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & & & & 1 & & & & & \\
& & & & & 1 & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
& & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
& & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
& 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Задача: как вывести следующие формулы:

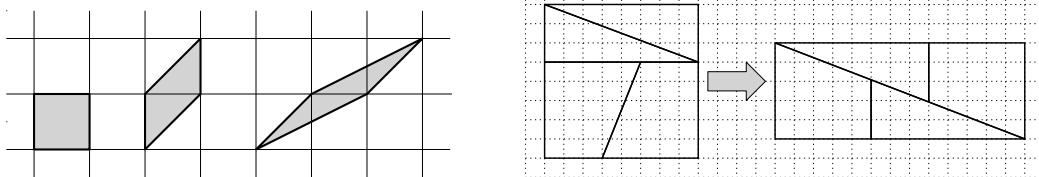
$$\begin{array}{ll} \bullet C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots = 2^n, & \bullet C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \frac{1}{3}2^n + \frac{2}{3} \cos \frac{\pi n}{3}, \\ \bullet C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}, & \bullet C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \dots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1} \cos \frac{\pi n}{4}. \end{array}$$

Гипотеза: $C_n^0 + C_n^k + C_n^{2k} + \dots \sim \frac{1}{k} 2^n$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. ($a_n \sim b_n \iff a_n/b_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.)

Задачи для заправки

Листок II: алгебра элементарных параллелограммов

Параллелограмм с вершинами в узлах тетрадной сетки $\mathbb{Z}^2$ называется *элементарным*, если он не содержит ни внутри, ни на границе других узлов. Примеры на рис. слева:



1. Вот одна известная с давних времён детская задача, в которой элементарный параллелограмм спрятан в буквальном смысле слова! Квадрат 8×8 разрезали на части и сложили из них прямоугольник 5×13 (рис. справа). Но $8 \times 8 = 64$, а $5 \times 13 = 65$. Откуда взялась лишняя клетка?

Основной результат листка — следующая классическая теорема.

2. Теорема. *Параллелограмм с вершинами в узлах решётки $\mathbb{Z}^2$ является элементарным в точности тогда, когда его площадь равна 1.*

Эта теорема имеет разнообразные применения. Например, она выполняет роль «базы индукции» в доказательстве *формулы Пика*, выражающей площадь S многоугольника с вершинами в $\mathbb{Z}^2$ через число N узлов, лежащих внутри него, и число D узлов на его границе: $S = N + \frac{D}{2} - 1$.

С точки зрения высшей алгебры этот критерий элементарности интересен тем, что по сути он эквивалентен описанию базисов свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^2$ и описанию группы её автоморфизмов, причём всё сказанное легко обобщается на n -мерный случай. (Это одна из тем университетского курса алгебры.)

3. Попробуйте доказать теорему 2, используя алгебраические идеи. Установите критерий биективности линейного отображения $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ с целочисленной матрицей.

Задачи для заправки

Листок III: вокруг систем линейных уравнений

1. Решите следующие системы:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \dots \\ x_{n-1} + x_n + x_1 = 0 \\ x_n + x_1 + x_2 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ \dots \\ x_{n-1} - 3x_n + 2x_1 = 0 \\ x_n - 3x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

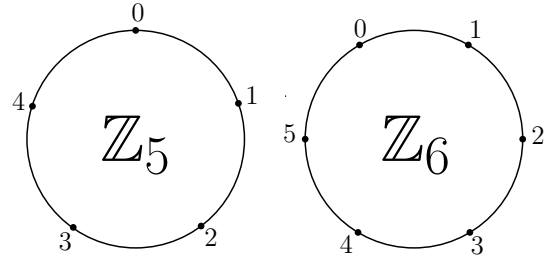
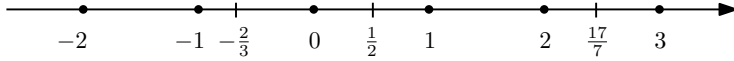
2. Про 13 гирь известно, что любые 12 из них можно так расположить на двух чашах весов по 6 на каждой, что наступит равновесие. Докажите, что массы всех гирь одинаковы.

3. В семь кружек разлили 3 л молока (наливали необязательно в каждую и необязательно поровну). Всё молоко из первой кружки разлили поровну по остальным. Затем всё молоко из второй кружки разлили поровну по остальным и т. д. После того, как то же сделали с седьмой кружкой, оказалось, что в каждой кружке столько же молока, сколько было вначале. Сколько молока было в каждой кружке вначале?

4. Прямоугольник $a \times b$ разбит на конечное число квадратов. Докажите, что $a/b \in \mathbb{Q}$.

Задачи для затравки
Листок IV: какая польза от вычетов

1. На прямой отмечены дроби $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{17}{7}$. Отметьте их на следующих рисунках, где изображены кольца $\mathbb{Z}_5$ и $\mathbb{Z}_6$, если это возможно.



2. Докажите, что числитель дроби, равной $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$,

а) кратен p при всех простых $p \geq 3$; б) кратен p^2 при всех простых $p \geq 5$.

3. Найдите устно ранги матриц (над $\mathbb{Q}$) $n \times n$ и $p \times p$ соответственно, где p — простое:

а)
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

б)
$$\begin{pmatrix} C_p^0 & C_p^1 & C_p^2 & C_p^3 & \dots & C_p^{p-2} & C_p^{p-1} \\ C_p^1 & C_p^0 & C_p^1 & C_p^2 & \dots & C_p^{p-3} & C_p^{p-2} \\ C_p^2 & C_p^1 & C_p^0 & C_p^1 & \dots & C_p^{p-4} & C_p^{p-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_p^{p-2} & C_p^{p-1} & C_p^{p-2} & C_p^{p-3} & \dots & C_p^0 & C_p^1 \\ C_p^{p-1} & C_p^{p-2} & C_p^{p-3} & C_p^{p-4} & \dots & C_p^1 & C_p^0 \end{pmatrix}.$$

4. Докажите, что многочлены а) $x^5 + x^2 + 1$; б) $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ неприводимы над $\mathbb{Z}$, т. е. не раскладываются на множители меньшей степени с целыми коэффициентами.

Задачи для затравки

Листок V: линейные рекуррентные последовательности

1. Последовательность Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ задаётся рекуррентно: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Может показаться невероятным, но формула её n -го члена имеет вид:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Конечно, имея эту формулу перед глазами, её легко доказать по индукции. Но хотелось бы понять, как она выводится!

Вот несколько комбинаторных задач, приводящих к числам Фибоначчи.

- а) Сколькими способами можно покрыть прямоугольник $2 \times n$ доминошками из двух клеток?
- б) Сколько существует последовательностей длины n из нулей и единиц, в которых длина каждого блока из единиц чётна?
- в) Сколько существует последовательностей длины n из нулей и единиц, в которых нет двух подряд идущих нулей?
- г) Кузнечик прыгает по числовой прямой либо на одно, либо на два деления вправо. Сколькими способами он может прискакать из точки 0 в точку n ?

2. Ханойская башня. Имеется три колышка, на первый из которых нанизаны n дисков с уменьшающимися кверху диаметрами. За один ход можно переносить только один диск, причём нельзя класть больший диск на меньший.

- а) За какое наименьшее число ходов можно перенести все n дисков на третий колышек?
- б) Тот же вопрос при условии, что диски можно перемещать только по циклу $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.
- в) А если диски нельзя непосредственно перемещать с первого колышка на третий и обратно?

3. Арифметико-геометрическая прогрессия. Так называется последовательность, удовлетворяющая соотношению $x_{n+1} = qx_n + d$ для некоторых q, d . Найдите формулу n -го члена такой последовательности.

4. Лягушка прыгает по вершинам а) треугольника ABC ; б) пятиугольника $ABCDE$, перемещаясь каждый раз на одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A ровно за n прыжков?

5. Сколько n -разрядных десятичных чисел, которые могут начинаться с нуля,

- а) не содержат в своей записи двух стоящих рядом чётных цифр;
- б) не содержат в своей записи цифры 5 после цифры 2?

6. Определим целые числа a_n и b_n равенствами

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Составьте линейные рекуррентные уравнения для a_n и b_n и решите их.

Замечание. На самом деле, выразить явно a_n и b_n через n можно и не составляя рекуррент. Подумайте, как.

7. Сколькими способами можно покрыть прямоугольник $2 \times n$, используя квадратики 1×1 , доминошки из двух клеток и уголки из трёх клеток?

8*. Сколько существует последовательностей длины n из нулей и единиц, в которых все блоки из нулей имеют длину ≥ 3 ?

Задачи для затравки
Листок VI: перестановки

1. «Пятнашки». На поле 4×4 как-то расположены 15 квадратных фишек с номерами от 1 до 15. Одна клетка всегда свободна, и на неё можно передвигать любую соседнюю фишку. Цель игры состоит в том, чтобы, передвигая фишки из начального положения, расположить их так, как показано на рисунке слева.

1	2	3	4	1	2	3	4
5	6	7	8	5	6	7	8
9	10	11	12	9	10	11	12
13	14	15		13	15	14	

- а) Докажите, что невозможно достичь цели, начиная с положения на рисунке справа.
б) Докажите, что из любого положения можно прийти к положению на одном из рисунков.

2. Король собрал своих десятерых придворных мудрецов и объявил, что устраивает их переаттестацию. „Завтра вы выстроитесь в колонну и каждый будет видеть впереди стоящих. Из колпаков с номерами от 1 до 11 один я спрячу, а остальные прикажу надеть на вас в случайном порядке. Вы по очереди, начиная с последнего (который видит всех), будете выкрикивать числа от 1 до 11, не повторяясь. Чтобы пройти аттестацию, хотя бы девять из вас должны назвать номер своего колпака. У вас есть сутки, чтобы договориться, как действовать.“

3. Несколько семей хотят обменяться квартирами. За один день каждая семья может принять участие не более чем в одном обмене квартирами с какой-нибудь другой семьей. Докажите, что любой сложный обмен можно осуществить не более чем за два дня.

4. Можно ли, вращая кубик Рубика, добиться того, чтобы: **а)** угловые кубики одной из его граней переставились по циклу, а остальные кубики остались на своих местах (возможно, повернувшись); **б)** один из боковых кубиков в нём перевернулся, а остальные остались на своих местах, не изменив положения?