

Программа коллоквиума по алгебре

2-й поток 2-й курс, 2025 г.

(лектор – Куликова О.В.)

(Предварительный вариант программы. Если какой-то из перечисленных ниже вопросов не будет рассмотрен на лекциях до 1-го ноября, он будет исключен из программы. Окончательный вариант будет представлен 1-го ноября.)

1. Понятие группы. Аддитивные и мультипликативные обозначения. Изоморфизм групп. Простейшие свойства. Примеры. Порядок элемента группы. Свойства.
2. Циклические группы. Классификация циклических групп. Подгруппы циклических групп.
3. Подгруппы. Примеры. Система порождающих. Примеры систем порождающих для S_n , $GL_n(F)$. Пример не конечно порожденной группы.
4. Смежные классы по подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее. Нормальные подгруппы. Факторгруппа по нормальной подгруппе.
5. Гомоморфизмы групп. Ядро и образ. Теорема о гомоморфизме. Связь между порядком ядра и образа. Канонический гомоморфизм.
6. Свободная группа. Универсальное свойство свободных групп.
7. Задание группы порождающими и определяющими соотношениями. Теорема Дика.
8. Прямое произведение (прямая сумма) групп – внутреннее и внешнее. Их эквивалентность. Теорема о факторизации прямого произведения.
9. Конечно порожденные абелевы группы. Базис. Свободные абелевы группы. Инвариантность ранга. Все свободные абелевы группы одного ранга изоморфны.
10. Подгруппы свободных абелевых групп, их свобода и ранг.
11. Связь между различными базисами свободной абелевой группы. Существование базиса свободной абелевой группы, согласованного с подгруппой.
12. Универсальное свойство свободной абелевой группы. Разложение конечно порожденной абелевой группы в прямую сумму циклических. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (доказательство существования).
13. Периодическая часть (подгруппа кручения). Разложение конечной абелевой группы в прямую сумму p -подгрупп, отвечающих различным простым p .
14. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (доказательство единственности).
15. Экспонента конечной группы. Критерий циклическости конечной абелевой группы. Конечные подгруппы в мультипликативной группе поля.
16. Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы. Связь между длиной орбиты и индексом стабилизатора. Группа вращений куба. Сопряженность стабилизаторов точек из одной орбиты.
17. Действие группы на себе левыми сдвигами, правыми сдвигами. Теорема Кэли. Действие группы на себе сопряжениями. Группа внутренних автоморфизмов группы. Центр группы. Классы сопряженности и централизаторы. Классы сопряженности и центр группы S_n .
18. Центр конечной p -группы. Группы порядка p^2 (p – простое).
19. Нормализатор подгруппы. Число подгрупп конечной группы, сопряженных данной подгруппе.
20. Силоские подгруппы конечной группы. Первая теорема Силова (о существовании).
21. Вторая теорема Силова (о сопряженности). Следствие о нормальных силоских подгруппах.
22. Третья теорема Силова (о количестве).

23. Коммутаторы и коммутант. Связь между коммутантом и нормальными подгруппами, факторгруппы по которым абелевы.
24. Системы порождающих групп $A_n, SL_n(F)$. Коммутанты групп S_n, A_n . Коммутанты групп $GL_n(F)$ и $SL_n(F)$ при $|F| > 3$.
25. Кратные коммутанты. Разрешимые группы. Свойства. При каких n группа S_n разрешима?
26. Неразрешимость групп $GL_n(F)$ и $SL_n(F)$ ($|F| > 3$). Разрешимость группы невырожденных треугольных матриц над полем. Разрешимость конечной p -группы и группы порядка pq , где p, q – простые.