

ПРИЛОЖЕНИЕ К КУРСУ "ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ АЛГЕБРЫ".

Утверждение. Пусть у нас есть некоторая система многочленов $\{f_1, \dots, f_k\}$, $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Пусть $\text{НОД}(LT(f_i), LT(f_j)) = 1$. Тогда s -полином S_{ij} редуцируем к нулю по системе $\{f_1, \dots, f_k\}$.

Доказательство.

Будем считать, что старшие коэффициенты у f_i и f_j равны нулю. Пусть $f_i = LT(f_i) + h_i$, $f_j = LT(f_j) + h_j$. Поскольку $\text{НОД}(LT(f_i), LT(f_j)) = 1$, получаем

$$S_{ij} = LT(f_j)f_i - LT(f_i)f_j.$$

Старший член многочленов $LT(f_j)f_i$ и $LT(f_i)f_j$ при вычитании сокращается. Допустим, что у $LT(f_j)f_i$ и $LT(f_i)f_j$ есть еще какой-то общий член (возможно с разными коэффициентами). Тогда он войдет в $LT(f_j)f_i$, а значит, он делится на $LT(f_j)$. С другой стороны он войдет в $LT(f_i)f_j$, а значит, он делится на $LT(f_i)$. Значит, он делится на $LT(f_i)LT(f_j)$, то есть является старшим и в $LT(f_j)f_i$ и в $LT(f_i)f_j$. То есть никакой член, кроме старшего не является общим. Значит, $S_{ij} = LT(f_j)h_i - LT(f_i)h_j$ — запись, в которой нет подобных. Более того из тех же соображений следует, что мы не можем применить к некоторому члену S_{ij} элементарную редукцию и по f_i и по f_j (для этого он должен делиться и на $LT(f_i)$ и на $LT(f_j)$).

Применяя элементарные редукции по f_j ко всем членам из S_{ij} , которые делятся на $LT(f_j)$, Получаем $LT(f_j)h_i \rightarrow h_jh_i$. Аналогично, применяя элементарные редукции по f_i ко всем членам, делящимся на $LT(f_i)$, получаем $-LT(f_i)h_j \rightarrow -h_ih_j$.

В итоге $LT(f_j)h_i - LT(f_i)h_j \rightarrow h_jh_i - h_ih_j = 0$.

Следствие. При построении базиса Грбнера по алгоритму Бухбергера можно не рассматривать S -многочлены для пар полиномов с взаимно простыми старшими членами.