

Контрольная 1. Вариант 1.

1. U и V – подпространства в векторном пространстве W , $\dim U = 4$, $\dim V = 4$, $\dim W = 10$, $\dim(U \cap V) = 2$. Найти $\dim(W/(U + V))^*$

2. Найти матрицу линейного оператора, переводящего $a_i \mapsto b_i, i = 1, 2, 3$, где $a_1 = (1, -1, 0)$, $a_2 = (2, 3, -2)$, $a_3 = (0, 2, -1)$, $b_1 = (-1, -1, 1)$, $b_2 = (2, 15, 10)$, $b_3 = (1, 6, 3)$.

3. $\dim V = 12$, есть 2 линейных оператора $A, B: V \rightarrow V$, $rk A = 5$, $rk B = 9$. Какой наименьший ранг может иметь оператор $(E - A)B$.

4. Доказать, что пространство $V = Mat_{4 \times 4}(\mathbb{C})$ является прямой суммой подпространств $V_1 = \{A \mid A = A^T\}$ и $V_2 = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ji} = -2a_{ij} \text{ при } i \leq j\}$.

Найти проекцию матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ на V_2 вдоль V_1 .

5. Пусть $v_1 = (3, 2, 4)$, $v_2 = (2, 1, 2)$, $v_3 = (1, 0, 1)$. Найти сопряжённый к $\{v_1, v_2, v_3\}$ базис пространства $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle^*$.

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$