Дополнительные главы алгебры.
Задачи

2023 - 2024

Оглавление

Глава 1

Свободные группы

1.1 Свободные абелевы группы

Задача 1. *Докажите, что определение 3 не зависит от выбора порядка на I.*

Задача 2. *Докажите утверждение 1.*

Задача 3. *Пусть $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Докажите, что $\mathbb{Q} = \langle X \mid x_1 - 2x_2, x_2 - 3x_3, \ldots, x_{n-1} - nx_n, \ldots\rangle_a$.*

Задача 4. *Докажите, что группа $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ является свободной абелевой группой. Какой в ней базис?*

Задача 5. *Является ли группа $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ свободной абелевой группой? Является ли группа $(\mathbb{Q}, +)$ свободной абелевой группой?*

Задача 6. *Пусть $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ и p — простое число. Рассмотрим группу $G = \langle X \mid px_1, x_1 - px_2, x_2 - px_3, \ldots, x_n - px_{n+1}, \ldots\rangle_a$. Докажите, что G изоморфна группе*

$$U_{p^\infty} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \exists k \in \mathbb{N}\ z^{p^k} = 1\}.$$

1.2 Свободные группы

Задача 7. *Докажите, что $D_n = \langle x, y \mid x^n = 1, y^2 = 1, yxy = x^{-1}\rangle$. Здесь x соответствует повороту на угол $\frac{2\pi}{n}$, а y соответствует любой симметрии.*

Задача 8. *Докажите, что $Q_8 = \langle x, y \mid x^4 = 1, y^2 = x^2, yxy^{-1} = x^{-1}\rangle$. Здесь x соответствует элементу i, y соответствует элементу j.*

Задача 9. *Докажите, что группа $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ бесконечна.*

Задача 10. *Пусть F — свободная группа. Докажите, что существует автоморфизм $\varphi : F \to F$, такой что $\varphi^2 = \mathrm{id}_F$ и $\varphi(x) = x$, только если $x = e$.*

1.3 Комплексы

Задача 11. *Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC. Пусть E, F, G — середины сторон AB, BC и CA соответственно. Рассмотрим 2-комплекс K, на множестве вершин $\{A, B, C, E, F, G\}$, в который входят 2-симплексы $\{A, E, G\}, \{B, E, F\}$ и $\{F, C, G\}$, а также все их подмножества. С помощью теоремы Титце найдите фундаментальную группу K.*

Задача 12. *Рассмотрим комплекс K из задачи 11. Рассмотрим комплекс L, полученный из K выбрасыванием всех 2-симплексов. Найдите фундаментальную группу комплекса L.*

Задача 13. *Пусть есть два связных комплекса K_1 и K_2. Пусть G_1 — фундаментальная группа K_1, а G_2 — фундаментальная группа K_2. Выберем вершину $a \in \mathrm{Vert}(K_1)$ и $b \in \mathrm{Vert}(K_2)$. Рассмотрим комплекс $K = K_1 \sqcup K_2$ и добавим в него ребро $\{a, b\}$. Какая фундаментальная группа у K?*

1.4 Накрытия комплексов. Теорема Нильсена-Шрайера

Задача 14. *Рассмотрим комплекс K с вершинами $\{1, 2, 3\}$, который состоит из симплексов $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$, а также всех одноэлементных подмножеств. Докажите, что фундаментальная группа K изоморфна $\mathbb{Z}$. Опишите накрытие K, которое соответствует подгруппе $2\mathbb{Z}$. Опишите накрытие K, которое соответствует произвольной подгруппе $\mathbb{Z}$.*

Задача 15. *У букета из двух окружностей фундаментальная группа изоморфна свободной группе с базисом x, y, где x соответствует классу замкнутого пути, проходящего по одной из окружностей, а y соответствует классу замкнутого пути, проходящего по второй окружности. Постройте накрытия для подгрупп $\langle x \rangle$ и $\langle xy \rangle$.*

Задача 16. *(Пинг-понг лемма.)*

Пусть группа G действует на множестве X, и элементы $g_1, \ldots, g_k \in G$ имеют бесконечный порядок. Предположим, что существуют непересекающиеся подмножества $X_1^+, \ldots, X_k^+$ и $X_1^-, \ldots, X_k^-$, такие что

$$g_i(X \setminus X_i^-) \subseteq X_i^+ \text{ и } g_i^{-1}(X \setminus X_i^+) \subseteq X_i^-$$

для всех i. Докажите, что подгруппа в G, порожденная $g_1, \ldots, g_k$, является свободной группой с базисом $\{g_1, \ldots, g_k\}$.

Задача 17. *Пусть F — свободная группа с базисом $\{g_1, \ldots, g_k\}$. Докажите, что всегда найдется действие F на некотором множестве X, удовлетворяющее условиям задачи 16.*

Задача 18. *Докажите, что свободная группа ранга 2 и более неразрешима. Выведите отсюда, что любая разрешимая группа не содержит свободных подгрупп ранга 2 и более.*

Глава 2

Теория Галуа

2.1 Конечные расширения полей

Задача 19. *Найдите минимальные многочлены следующих элементов:*

а) $2-3i$ *над* $\mathbb{R}$*;*

б) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ *над* $\mathbb{Q}$;

в) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ *над* $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$;

Задача 20. *Докажите, что* $\cos\frac{2\pi}{n}$ *алгебраическое над* $\mathbb{Q}$ *для любого* n*.*

Задача 21. *Пусть* $f\in K[x]$ *и* $\deg f=n$*. Докажите, что* $[K(f):K]$ *делит* $n!$.

Задача 22. *Постройте поля разложения следующих многочленов:*

а) $x^2+x+2\in\mathbb{Q}[x]$;

б) $x^3+1\in\mathbb{Q}[x]$;

в) $x^6+3\in\mathbb{Q}[x]$.

2.2 Конечные поля. Корни из единицы

Задача 23. *1. Постройте явно поля* $\mathbb{F}_8$ *и* $\mathbb{F}_9$*. Найдите порождающие в* $\mathbb{F}_8^*$ *и* $\mathbb{F}_9^*$.

2. Сколько подполей в поле из p^{2^n} *элементов?*

Задача 24. *Докажите, что конечное поле не может быть алгебраически замкнутым.*

Задача 25. *1. Постройте многочлены* Φ_8 *и* $\Phi_{10}\in\mathbb{Z}[x]$.

2. Пусть p *— простое число. Найдите* $\Phi_p(x)\in\mathbb{Z}[x]$.

Задача 26. *Докажите, что над полем* $\mathbb{Z}_p$ *многочлен* $\Phi_{p-1}(x)$ *приводим при* $p>3$.

2.3 Сопряженные элементы. Нормальные и сепарабельные расширения

Задача 27. *1. Найдите в* $\mathbb{C}$ *все элементы сопряженные с* $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ *над* $\mathbb{Q}$.

2. *Найдите в* $\mathbb{C}$ *все элементы сопряженные с* $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ *над* $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

3. *Для поля* $\mathbb{F}_4 \simeq \mathbb{Z}[x]/(x^2+x+1)$ *найдите сопряженные элементы с* $\overline{x}$ *над* $\mathbb{Z}_2$. *Найдите остальные классы сопряженности над* $\mathbb{Z}_2$.

Задача 28. *Какие из следующих расширений нормальны?*

1. $\mathbb{Q}(i\sqrt[6]{3})/\mathbb{Q}$;
2. $\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}(t^4)$;
3. $\mathbb{R}(t)/\mathbb{R}(t^4)$;

Задача 29. *Найдите в* $\mathbb{Z}_p(t)$ *все элементы сепарабельные над* $\mathbb{Z}_p(t^p)$.

2.4 Расширения Галуа

Задача 30. *Какие из следующих расширений* L/K *являются расширениями Галуа? Найдите соответствующие группы* $\mathrm{Aut}_K(L)$.

1. $L/K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$.
2. $L/K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
3. $L/K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$.

Задача 31. *Является ли расширение* $L/K = \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}$ *расширением Галуа? Найдите группу* $\mathrm{Aut}_K(L)$.

Задача 32. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$.

1. *Докажите, что* φ *переводит квадраты в квадраты, а положительные числа в положительные. Докажите, что если* $a < b$, *то* $\varphi(a) < \varphi(b)$.
2. *Докажите, что если* $-\frac{1}{m} < a - b < \frac{1}{m}$, *где* $m \in \mathbb{Z}$, *то* $-\frac{1}{m} < \varphi(a) - \varphi(b) < \frac{1}{m}$. *Выведите отсюда, что* φ *— непрерывное отображение.*
3. *Докажите, что группа* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ *тривиальна.*

2.5 Основная теорема теории Галуа

Задача 33. *Найдите группу Галуа следующих многочленов над* $\mathbb{Q}$:

1. $x^4 - 14x^2 + 9$;
2. $x^4 + 4$;
3. $(x^2-2)(x^2-3)(x^2-5)$;
4. $(x^3-2)(x^3-3)$;

В каждом случае кажите все подполя в соответствующем поле разложения.

Задача 34. *Пусть p — простое. Докажите, что группа Галуа многочлена $x^p - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ изоморфна группе матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a \in \mathbb{Z}_p^*, b \in \mathbb{Z}_p$.*

2.6 Разрешимость в радикалах

Задача 35. *Найдите какой-нибудь корень уравнения $x^3 - 6x^2 - 6x - 2 = 0$.*

Задача 36. *Найдите какой-нибудь корень уравнения $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 20x - 5 = 0$.*

Глава 3

Модули над кольцами

3.1 Модули. Подмодули. Фактормодули

Задача 37. *Пусть M — модуль над R. Докажите, что $r0 = 0$ и $0m = 0$ для любых $r \in R$ и $m \in M$.*

Задача 38.

1. *(Первая теорема о гомоморфизме.) Пусть $f : M \to N$ — гомоморфизм $R-$модулей. Докажите, что* $\operatorname{Im} f = M/\ker f$.
2. *(Вторая теорема о гомоморфизме.) Пусть N_1, N_2 — подмодули $R-$модуля M. Тогда*
$$(N_1 + N_2)/N_1 \simeq N_2/(N_1 \cap N_2).$$
3. *(Третья теорема о гомоморфизме.) Пусть M — R-модуль и $A \subseteq B$ — подмодули M. Тогда*
$$(M/A)/(B/A) \simeq M/B;$$
4. *(Четвертая теорема о гомоморфизме.) Пусть N — подмодуль $R-$модуля M. Тогда есть биекция между подмодулями в M/N и подмодулями в M, содержащими N.*

Задача 39. *Приведите пример модулей M, N и гомоморфизма групп $f : M \to N$, который не является гомоморфизма модулей.*

Задача 40. *Пусть R — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Докажите, что модуль $\operatorname{Hom}_R(R, M)$ изоморфен модулю M.*

3.1.1 Тензорное произведение модулей

Задача 41. *Докажите, что $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \not\simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ как $\mathbb{C}$-модули.*

Задача 42. *Докажите, что $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$ как абелевы $\mathbb{Q}$-модули и как абелевы группы.*

Задача 43. *Пусть $n = p^k m$, где p — простое число и $(p, m) = 1$, и пусть A — абелева группа порядка n. Докажите, что группа $\mathbb{Z}_{p^k} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ изоморфна силовской p-подгруппе A.*

Задача 44. *Докажите, что $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ как $\mathbb{R}$-модули.*