Реализация подстановок чётной степени произведениями трёх инволюций без неподвижных точек

Ф.М. Малышев

Теорема 1. *Пусть* $\pi \in A_{2n}$ *при чётном* $n > 3$ *или* $\pi \in S_{2n} \setminus A_{2n}$ *при нечётном* $n \geqslant 3$. *Тогда подстановка* π *3-представима (является произведением 3-х инволюций без неподвижных точек), если и только если она не содержится среди подстановок следующих семи семейств:*
a) (532^i), $i \geqslant 0$; b) (51^i), $i \equiv 3 \pmod 4$, $i \geqslant 3$; c) (431^i), $i \equiv 3 \pmod 4$, $i \geqslant 3$;
d_a) (312^i), $i \geqslant 0$; d_b) (31^i), $i \equiv 1 \pmod 4$, $i \geqslant 5$; d_c) (231^i), $i \equiv 1 \pmod 4$, $i \geqslant 5$; d_0) $(3^5 1)$.

Подстановки заданы длинами циклов, непревосходящих 5, верхний индекс используется для числа циклов. При конкретном $n \geqslant 3$ число подстановок, неявляющихся 3-представимыми, равно либо 1 при $n = 3$, либо 5 при $n = 8$, либо 4 при остальных $n \geqslant 4$. В свете проблемы Бреннера из работы [1] (решаемой в [2]) о достаточных условиях на классы сопряжённости $D \subset A_m$ (у нас $m = 2n$) для равенства $D^3 = A_{2n}$, возникает вопрос: на сколько "справедливо" исключать (как предлагается в [1]) класс парноцикловых подстановок. Для $n = \infty$ задача о 3-представимости решена в [3], где обозначен этот же вопрос для конечных n.

Теорема Морана. *Пусть* $\pi \in S_X$, $|X| = \infty$. *Тогда подстановка* π *является 3-представимой, если и только если она не содержится среди подстановок следующих четырёх семейств:* b) (51^∞); d_b) (31^∞); c) (431^∞); d_c) (231^∞).

Эта теорема следует из теоремы 1, но не наоборот.

Список литературы

[1] Brenner J.L. Covering theorems for FINANSIGS VIII – Almost all conjugacy classes in A_n have exponent $\leqslant 4$. J. Austral. Math. Soc. 1978. V. 25. P. 210–214.

[2] Dvir Y. Covering properties of permutation groups. Lecture Notes in Math. 1985. V. 1112. P. 198–221.

[3] Moran G. Products of invjlution classes in infinite symmetric groups. Transactions of the fmerican Mathematical Society, V. 307, № 2, 1988, 745–762.