

Программа курса

«Алгебраическая геометрия, алгебраические группы и теория инвариантов».

2022-2023г.

- 1) Нётеровы кольца. Эквивалентные условия нётеровости. Теорема Гильберта о базисе идеала.
- 2) Аффинные алгебраические многообразия. Регулярные функции. Морфизмы. Двойственный гомоморфизм.
- 3) Целые расширения алгебр и конечные модули.
- 4) Лемма Натер о нормализации.
- 5) Теорема Гильберта о нулях.
- 6) Топология Зарисского, её нётеровость. Разложение на неприводимые компоненты.
- 7) Критерий неприводимости аффинного алгебраического многообразия.
- 8) Главные открытые подмножества. Регулярные функции на главных открытых подмножествах.
- 9) Рациональные функции и отображения.
- 10) Прямые произведения аффинных многообразий. Неприводимость прямого произведения непроектируемых многообразий.
- 11) Замкнутые вложения и доминантные морфизмы (рациональные отображения) и их алгебраическая характеристика.
- 12) Конечные морфизмы и их свойства.
- 13) Доминантные морфизмы, их локальное разложение на конечный морфизм и проекцию, теорема об образе.
- 14) Размерность аффинного многообразия.
- 15) Теорема Крулля о размерности гиперповерхности.
- 16) Теорема о размерности слоёв морфизма.
- 17) Рациональные накрытия, степень накрытия, бирациональные отображения. Факторизация рациональных отображений.
- 18) Касательные пространства.
- 19) Дифференциалы морфизмов.

- 20) Гладкие и особые точки.
- 21) Касательное пространство к слою морфизма.
- 22) Алгебраические многообразия. Пучки функций, аффинные атласы, морфизмы, прямые произведения.
- 23) Проективные многообразия.
- 24) Алгебраические группы: определение и простейшие свойства. Связные компоненты алгебраической группы.
- 25) Алгебраичность группы, порождённой семейством алгебраических множеств. Коммутант алгебраической группы.
- 26) Гомоморфизмы алгебраических групп. Ядро и образ. Действия алгебраических групп. Орбиты и стабилизаторы.
- 27) Рациональные представления. Линеаризуемость алгебраических групп и их действий на аффинных многообразиях.
- 28) Однородные пространства. Теорема Шевалле.
- 29) Факторгруппы алгебраических групп.
- 30) Касательная алгебра Ли.
- 31) Дифференциалы гомоморфизмов. Алгебры Ли ядер, образов и прообразов при гомоморфизмах. Алгебра Ли пересечения подгрупп. Биекция между связными алгебраическими подгруппами и их алгебрами Ли.
- 32) Связь между линейными представлениями алгебраических групп и их алгебр Ли. Присоединённое представление. Нормальные подгруппы и идеалы. Центр и централизаторы.
- 33) Нильпотентные и унипотентные операторы. Однопараметрический подгруппы.
- 34) Алгебраические торы, квазиторы и диагонализуемые подгруппы.
- 35) Алгебраическая группа, порождённая линейным оператором.
- 36) Разложение Жордана для оператора.
- 37) Разложение Жордана в алгебраической группе и ее алгебре Ли.
- 38) Разрешимые группы. Теорема Кординга о неподвижной точке. Теорема Ли-Колчина.
- 39) Унипотентные группы. Расщепление связной разрешимой группы.
- 40) Борелевские подгруппы. Максимальные унипотентные группы, максимальные торы. Их сопряжённость.
- 41) Разрешимые и унипотентные группы. Полупустые группы и их алгебры Ли.

- 42) Дедуктивные группы.
- 43) Геометрический фактор. Примеры и необходимые условия существования.
- 44) Теорема Розенлихта.
- 45) Поле рациональных инвариантов. Рациональный фактор.
- 46) Теорема Гильберта об инвариантах.