

15 апреля 2025 года

СЕМНАДЦАТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ МЕХМАТ МГУ

1. Назовём линейное подпространство в пространстве квадратных матриц *невырожденным*, если все содержащиеся в нём матрицы, кроме нулевой, невырождены. Найдите максимальную размерность невырожденного подпространства в пространстве
 - а) комплексных $n \times n$ матриц,
 - б) вещественных 4×4 матриц,
 - в) рациональных $n \times n$ матриц.
2. Вещественная невырожденная матрица A три на три такова, что $\text{tr}(A^k) = 0$ для бесконечного количества натуральных чисел k . Можно ли утверждать, что A^n – скалярная матрица для некоторого натурального числа n ?
3. Покажите, что произведение $7 \cdot 77 \cdot 777 \cdot 7777 \cdot \dots$ ($n \geq 1$ множителей) никогда не является квадратом целого числа.
4. Покажите, что многочлен $f(x) + i$ имеет простой (т.е. кратности один) корень в $\mathbb{C}$, если $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ и не константа.
5. Покажите, что если множество всех квадратов элементов поля является собственным подполем, то характеристика поля равна двум.
6. Покажите, что автоморфизм порядка два неединичной абелевой группы всегда имеет неединичную инвариантную циклическую подгруппу.
7. Покажите, что в каждой конечной неразрешимой группе найдётся подгруппа, не изоморфная никакой нормальной подгруппе.
8. Покажите, что над полем из двух элементов конечная абелева группа обладает неприводимым
 - а) двумерным представлением тогда и только тогда, когда её порядок делится на 3,
 - б) четырёхмерным представлением тогда и только тогда, когда её порядок делится на 5.

Результаты олимпиады и решения задач появятся не позднее 1 мая на сайте
<http://halgebra.math.msu.su/Olympiad/>