

8 апреля 2023 года

## ПЯТНАДЦАТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ НА МЕХМАТЕ МГУ

1. Покажите, что произведение любых ста транспозиций (в любом порядке), порождающих симметрическую группу  $S_{101}$ , является циклом длины 101.
2. Рассмотрим sudoku, то есть матрицу  $9 \times 9$ , в которой
  - каждая строка содержит (переставленные в некотором порядке) числа  $1, 2, \dots, 9$  (по одному разу каждое).
  - каждый столбец содержит (переставленные в некотором порядке) числа  $1, 2, \dots, 9$  (по одному разу каждое).
  - если разделить эту матрицу на 9 матриц  $3 \times 3$ , то каждая матрица  $3 \times 3$  содержит числа  $1, 2, \dots, 9$  (по одному разу каждое).

Докажите, что определитель данной матрицы  $9 \times 9$  делится на 405.

3. Верно ли, что вещественные квадратные матрицы  $A$  и  $B$  одинакового размера равны тогда и только тогда, когда для любой матрицы  $X$  такого же размера из равенства  $\det(A + X) = 0$  следует равенство  $\det(B + X) = 0$ .

4. Дана пара обратимых
  - а) вещественных
  - б) комплексных

матриц  $A$  и  $B$  размера  $2023 \times 2023$ . Всегда ли  $A$  и  $B$  можно одновременно привести к верхнетреугольному виду элементарными преобразованиями строк и столбцов над соответствующим полем? (*Одновременно* означает, что к двум данным матрицам применяются одинаковые преобразования.)

5. Через  $[G : H]$  мы обозначаем индекс подгруппы  $H$  в группе  $G$ . Пусть  $H_1$  и  $H_2$  – две подгруппы в группе  $G$ . Известно, что  $[G : H_1] = [G : H_2] = n$  и  $[G : H_1 \cap H_2] = n(n - 1)$ . Докажите, что подгруппы  $H_1$  и  $H_2$  сопряжены.

6. Покажите, что ядро всякого гомоморфизма из конечной группы  $G$  в группу из двух элементов содержит не менее половины классов сопряжённости группы  $G$ .

7. Может ли ассоциативное кольцо с единицей содержать ровно пять обратимых элементов?

8. Пусть многочлены  $f_1, \dots, f_{100} \in \mathbb{C}[x]$  попарно не пропорциональны. Означает ли это, что для некоторого натурального  $n$  многочлены  $f_1^n, \dots, f_{100}^n$  линейно независимы?

Результаты олимпиады и решения задач появятся не позднее 22 апреля на сайте <http://halgebra.math.msu.su/Olympiad/>