28 апреля 2026 года

ВОСЕМНАДЦАТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ

МЕХМАТ МГУ

1) У квадратной матрицы сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна нулю. Докажите, что все алгебраические дополнения всех элементов этой матрицы равны между собой.

2) Назовём оператор A локально нильпотентным, если для любого вектора v найдётся натуральное число n (зависящее от v) такое, что $A^n(v) = 0$. Пусть на счётномерном векторном пространстве V задан локально нильпотентный оператор A. Верно ли следующее обобщение теоремы о жордановой нормальной форме для нильпотентного оператора:

Существует базис пространства V, который разбивается на конечное или счётное количество подмножеств. В каждом подмножестве можно занумеровать векторы $v_1, v_2 \dots$ так, что $A(v_1) = 0$ и $A(v_i) = v_{i-1}$ для $i > 1$.

3) Покажите, что если в подалгебре алгебры вещественных матриц $n \times n$ все матрицы верхнетреугольные с нулями на диагонали и имеют ранг не больше k, то произведение любых $k+1$ матриц из этой подалгебры равно нулю.

Замечание: подалгеброй называется векторное подпространство, замкнутое относительно умножения.

4) Студент рассмотрел определитель $n \times n$ как однородный многочлен степени n от n^2 переменных — элементов матрицы. Он выяснил, что этот многочлен неприводим над $\mathbb{C}$, и заменил коэффициенты при некоторых мономах (равные ± 1) на произвольные ненулевые комплексные числа, в надежде получить приводимый многочлен.

а) Развейте ложные надежды студента — докажите, что многочлен останется неприводим над $\mathbb{C}$.

б) Разрешим студенту также вычёркивать мономы (то есть ставить у мономов нулевой коэффициент). Какое наименьшее число мономов ему придётся вычеркнуть, чтобы получившийся многочлен стал приводимым?

5) Сколько существует конечных групп, в которых число элементов на единицу больше числа циклических подгрупп? (Подгруппа, состоящая только из единицы, также считается.)

6) Найдите максимальный размер поля, вложенного в кольцо $n \times n$-матриц над полем из p элементов, где p — простое число.

7) Назовём *почти центром* группы множество элементов, коммутирующих хотя бы с одним неединичным элементом каждой неединичной подгруппы. Верно ли, что почти центр – это всегда подгруппа?

8)

а) Покажите, что если множество всех квадратов элементов некоторого поля является собственным подполем, то характеристика поля равна двум.

б) Что можно сказать про характеристику, если множество всех кубов элементов поля является собственным подполем?

Результаты олимпиады и решения задач появятся не позднее 16 мая на сайте http://halgebra.math.msu.su/Olympiad/