СИСТЕМЫ КОРНЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Бунина Елена Игоревна

Введение

Данный спецкурс посвящен классификации систем корней и двум большим ее применениям — описанию всех правильных многогранников в n-мерном евклидовом пространстве и описанию всех полупростых комплексных алгебр Ли.

Это не единственное применение систем корней, они также используются, например, для классификации особенностей многообразий (https://arxiv.org/pdf/0809.2579.pdf, упражнение 66), классификации дискретных подгруппы в $\mathrm{SU}(2)$ (https://eudml.org/doc/154709), построении обобщенных многочленов Чебышева (https://arxiv.org/pdf/2001.09144.pdf), в теории представлений колчанов (V. Kac, Root systems, representations of quivers and invariant theory. Lecture Notes 996, или H. Kraft, Ch. Riedtmann: Geometry of representations of quivers. London Math. Soc. Lecture Notes Series, 116) и так далее.

Данные лекции в основном основаны на двух книжках — книге Е.Ю. Смирнова "Группы отражений и правильные многогранники" (Москва, МЦНМО, 2009) и книге Дж. Хамфриса "Введение в теорию алгебр Ли и их представлений" (Москва, МЦНМО, 2003).

Первая книжка посвящена, в основном, классификации всех правильных многогранников, для этого системы корней определяются более "слабо", чем во второй книге, — используются только первые две аксиомы.

Мы будем следовать именно этому определению, пока нам не понадобится более строгое.

1 Лекция 1. Правильные многогранники, группы отражений и системы корней

1.1 Многогранники

Пусть V — конечномерное евклидово пространство. Обозначим через $\mathrm{Sym}\, V$ группу движений пространства V.

Определение 1. Пусть M — какое-либо множество в V. Через $\mathrm{Sym}\, M$ обозначим группу симметрий этого множества, т. е. множество движений пространства V, переводящих M в себя. Через $\mathrm{Sym}^+ M$ будем обозначать группу вращений множества M.

Определение 2. *Выпуклым многогранником* называется ограниченная фигура M, полученная как пересечение конечного числа полупространств в V. *Размерностью* многогранника M называется размерность наименьшего аффинного подпространства в V, содержащего M. Многогранник называется *невырожденным*, если его размерность равна $\dim V$.

Если M — многогранник, то группа $Sym\, M$ будет сохранять его центр масс. Поэтому мы можем рассматривать ее как подгруппу в группе ортогональных преобразований $O(V)$ пространства V (поместив начало координат пространства в центр масс многогранника).

Пусть многогранник M — невырожденный. Тогда движение пространства V полностью задается образами вершин многогранника. Кроме того, при движении вершины обязаны переходить в вершины. Следовательно, имеет вложение группы $\mathrm{Sym}\, M$ в симметрическую группу $\mathbf{S}(Vert\, M)$, то есть $\mathrm{Sym}\, M$ — конечная группа.

Известными примерами групп $\mathrm{Sym}\, M$ являются группа диэдра $\mathbf{D}_m$ движений правильного плоского m-угольника, группа $\mathbf{S}_4$ движений правильного тетраэдра.

1.2 Группы отражений в евклидовом пространстве

Будем считать, что мы работаем в фиксированном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, наделенном положительно определенной симметрической билинейной формой (x, y). *Отражение* в пространстве $\mathbb{R}^n$ геометрически представляет собой обратимое линейное преобразование, которое оставляет на месте точки некоторой *гиперплоскости* (то есть подпространства коразмерности один) и отражает каждый ортогональный ей вектор в противоположный. Ясно, что отражение *ортогонально*, то есть сохраняет скалярное произведение. Каждый ненулевой вектор α определяет отражение σ_α с плоскостью отражения

$$P_\alpha = \{\beta \in \mathbb{R}^n \mid (\beta, \alpha) = 0\}.$$

Для отражения σ_α легко выписать формулу

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

Поскольку число $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ будет в дальнейшем нам часто встречаться, обозначим его через $\langle \beta, \alpha \rangle$ и назовем *коэффициентом отражения*. Функция $\langle \beta, \alpha \rangle$ линейна только по β.

Определение 3. Конечная группа $W \subset O(V)$ называется *группой отражений*, если существуют такие отражения $\sigma_{\alpha_1}, \dots, \sigma_{\alpha_r}$, что

$$W = \langle \sigma_{\alpha_1}, \dots, \sigma_{\alpha_r} \rangle.$$

Приведем три серии примеров групп отражений в пространствах произвольной размерности, довольно важных. У этих групп есть названия $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_n$ и $\mathbf{D}_n$.

Пример 1 ($\mathbf{A}_{n-1}$, $n \geqslant 2$). Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис пространства V. Рассмотрим симметрическую группу $\mathbf{S}_n$, действующую на V перестановками базисных векторов. Заметим, что транспозиция $(i\, j)$ действует как отражение, переводящее вектор $e_i - e_j$ в противоположный и оставляющее неподвижным его ортогональное дополнение, а группа $\mathbf{S}_n$ порождается транспозициями.

Пример 2 ($\mathbf{B}_n$, $n \geqslant 2$). Пусть снова $V = \mathbb{R}^n$. Пусть на V, как и выше, действует перестановками координат группа $\mathbf{S}_n$. Рассмотрим еще n отражений σ_{e_i}, каждое из которых будет переводить базисный вектор e_i в $-e_i$, а остальные оставлять на месте. Эти смены знаков образуют группу, изоморфную $(\mathbb{Z}_2)^n$, произведение этих двух групп дает полупрямое произведение, в котором последняя группа нормальна.

Пример 3 ($\mathbf{D}_n$, $n \geqslant 4$). Эта группа будет подгруппой индекса 2 в только что описанной группе $\mathbf{B}_n$. А именно, разрешим переставлять координаты при помощи $\mathbf{S}_n$ и менять знак у четного количества координат. Получим группу, порожденную отражениями относительно $e_i - e_j$ и $e_i + e_j$, где $i \neq j$.

1.3 Системы корней

Пусть W — группа отражений, действующая на пространстве V.

Предложение 1. *Если $t \in O(V)$ — произвольное ортогональное преобразование, а $\sigma_\alpha \in W$ — отражение относительно вектора α, то $t\sigma_\alpha t^{-1} = \sigma_{t(\alpha)}$ — отражение относительно вектора $t(\alpha)$. В частности, если $w \in W$, то и $\sigma_{w(\alpha)} \in W$.*

Доказательство. Ясно, что $t\sigma_\alpha t^{-1}$ переводит вектор $t(\alpha)$ в противоположный ему. Так что нужно лишь показать, что $t\sigma_\alpha t^{-1}$ поточечно оставляет на месте гиперплоскость $P_{t(\alpha)}$. Заметим, что условие $\lambda \in P_\alpha$ равносильно тому, что $t(\lambda) \in P_{t(\alpha)}$, так как $(\alpha, \lambda) = (t(\alpha), t(\lambda))$. Значит,

$$(t\sigma_\alpha t^{-1})(t(\lambda)) = t\sigma_\alpha(\lambda) = t(\lambda),$$

если $\lambda \in P_\alpha$.

$\square$

Значит, группа W как-то переставляет прямые $\langle\alpha\rangle$, соответствующие всевозможным отражениям $\sigma_\alpha \in W$. Фиксируем на каждой такой прямой пару векторов $\{\alpha, -\alpha\}$, длины которых положим равными единице. Полученный набор векторов называется *системой корней*, соответствующей группе W.

Дадим для системы корней аксиоматическое определение.

Определение 4. Конечный непустой набор векторов $\Phi \in V$, не содержащий нулевого вектора, называется *системой корней*, если выполнены следующие условия:

(R1) $\alpha \in \Phi$ тогда и только тогда, когда $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$;

(R2) Если $\alpha \in \Phi$, то $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$.

Сами векторы из набора Φ называются *корнями*.

По аксиоматически определенной системе корней Φ можно построить группу отражений Φ: это будет группа, порожденная отражениями относительно всех корней из Φ.

1.4 Простые и положительные корни

Определение 5. Транзитивное отношение $<$ на V называется *отношением линейного порядка*, если выполнены следующие условия:

(1) для любых не равных друг другу векторов $\lambda, \mu \in V$ либо $\lambda < \mu$, либо $\mu < \lambda$;

(2) если $\lambda < \mu$, то $\lambda + \nu < \mu + \nu$ для любого вектора $\nu \in V$;

(3) если $\lambda < \mu$, то $c\lambda < c\mu$ при всех действительных $c > 0$ и $c\mu < c\lambda$ при всех $c < 0$.

Вектор λ называется *положительным*, если $0 < \lambda$.

Замечание 1. *Такие отношения порядка на V существуют. А именно, с каждым базисом $(e_1, \ldots, e_n)$ можно связать линейный порядок на V, задаваемый лексикографически:*

$$\alpha = \sum a_i e_i < \beta = \sum b_i e_i$$

тогда и только тогда, когда для некоторого j выполнено неравенство $a_j < b_j$, а для всех $i < j$ выполнено равенство $a_i = b_i$.

Выберем и зафиксируем какой-нибудь линейный порядок на V.

Определение 6. *Системой положительных корней* в Φ называется множество

$$\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi \mid 0 < \alpha\}.$$

Множество $\Phi^- := -\Phi$ называется *системой отрицательных корней.* Ясно, что $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$.

Определение 7. Подмножество $\Delta \subset \Phi$ называется *системой простых корней* или *базисом системы корней*, если

(1) Δ является базисом для линейной оболочки системы корней Φ;

(2) всякий вектор $\alpha \in \Phi$ есть линейная комбинация $\sum c_\gamma \gamma$, где все γ принадлежат Δ, а все c_γ или все неотрицательны, или все неположительны.

Априори неясно, почему системы простых корней существуют. Докажем это.

Теорема 1. 1. *Если Δ — система простых корней, то существует единственная система положительных (относительно некоторого упорядочения на V) корней Φ^+, содержащая Δ.*

2. *Всякая система положительных корней Φ^+ содержит единственную систему простых корней Δ.*

Доказательство. 1. Единственность следует из того, что все неотрицательные линейные комбинации векторов из Δ, лежащие в Φ, должны принадлежать Φ^+, то есть множество Φ^+ определено однозначно. Чтобы доказать, что Φ^+ (иначе говоря, соответствующее упорядочение) существует, дополним Δ до базиса всего пространства V и возьмем в качестве Φ^+ множество векторов из Φ, положительных относительно соответствующего лексикографического упорядочения.

2. Единственность. Пусть Φ^+ содержит систему простых корней Δ, тогда Δ определяется однозначно как множество векторов из Φ^+, не представимых в виде положительной линейной комбинации двух и более векторов из Φ^+.

Существование. Выберем минимальную систему (по включению) $\widetilde{\Delta} \in \Phi^+$, обладающую тем свойством, что всякий корень в Φ^+ есть неотрицательная линейная комбинация корней из $\widetilde{\Delta}$. Такая система с очевидностью существует (например, нужным свойством обладает сама система Φ^+, поэтому множество соответствующих систем непусто, из него можно выбрать минимальный по включению элемент). Значит, надо показать, что она линейно независима.

Это будет следовать из такого утверждения, которое мы докажем ниже:

Для любой пары не равных друг другу корней $\alpha, \beta \in \widetilde{\Delta}$ выполняется неравенство $(\alpha, \beta) \leqslant 0$.

Докажем по модулю этого утверждения, что система $\widetilde{\Delta}$ линейно независима. Пусть имеется некоторая нетривиальная линейная комбинация $\sum a_i\alpha_i = 0$. Перенесем все слагаемые, коэффициенты перед которыми отрицательны, в правую часть. Получим равенство

$$\sigma = \sum b_i\beta_i = \sum c_j\gamma_j, \text{ где } b_i, c_j > 0.$$

Тогда согласно приведенному выше утверждению

$$0 \leqslant (\sigma,\sigma) = \Big(\sum b_i\beta_i, \sum c_j\gamma_j\Big) \leqslant 0,$$

откуда следует, что $\sigma = 0$, и мы получили противоречие.

Осталось доказать утверждение.

Пусть оно неверно для некоторых $\alpha, \beta \in \widetilde{\Delta}$. Запишем

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle\beta,\alpha\rangle\alpha, \text{ где } \langle\beta,\alpha\rangle = 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} > 0.$$

Поскольку $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$, мы заключаем, что либо $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+$, либо $-\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+$.

Рассмотрим сначала случай $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+$. Пусть $\sigma_\alpha(\beta) = \sum c_\gamma\gamma$, где все корни $\gamma \in \widetilde{\Delta}$, а все c_γ неотрицательны. Возможны два подслучая.

а) Коэффициент $c_\beta < 1$. Тогда

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle\beta,\alpha\rangle\alpha = c_\beta + \sum_{\gamma\neq\beta} c_\gamma\gamma.$$

Значит,

$$(1-c_\beta)\beta = \langle\beta,\alpha\rangle\alpha + \sum_{\gamma\neq\beta} c_\gamma\gamma.$$

Получается, что один корень системы $\widetilde{\Delta}$ выражен как положительная линейная комбинацию других, что противоречит минимальности системы.

б) Пусть $c_\beta \geqslant 1$. Аналогичным образом получается, что

$$0 = (c_\beta - 1)\beta + \langle\beta,\alpha\rangle\alpha + \sum_{\gamma\neq\beta} c_\gamma\gamma.$$

Значит, линейная комбинация векторов из Φ^+ с положительными коэффициентами равна нулю, что невозможно в силу аксиом линейного порядка.

Случай $-\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+$ оставим в качестве упражнения.

□

Следствие 1. *Если Δ — система простых корней, то $(\alpha,\beta) \leqslant 0$ для всех $\alpha,\beta \in \Delta$. Иными словами, углы между простыми корнями не бывают острыми.*

1.5 Сопряженность систем простых и положительных корней

Здесь и далее мы фиксируем систему простых и положительных корней $\Delta \subset \Phi^+ \subset \Phi$.

Из определения следует, что при любом $w \in W$ множество $w\Delta$ будет системой простых корней, а $w\Phi^+$ — системой положительных корней относительно соответствующего отношения порядка. Оказывается, если $\alpha \in \Delta$, то $\sigma_\alpha \Phi^+$ и Φ^+ отличаются на один корень.

Предложение 2. *Пусть $\Delta \subset \Phi^+$ и $\alpha \in \Delta$. Тогда $\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$.*

Доказательство. Пусть $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ и $\beta = c_\gamma \gamma$ — представление β в виде линейной комбинации простых корней. При некотором векторе $\gamma \neq \alpha$ найдется строго положительный коэффициент $c_\gamma > 0$. Отразим β относительно α:

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha.$$

Коэффициент при γ в разложении $\sigma_\alpha(\beta)$ не изменится (т.е. он равен c_γ). Значит, $\sigma_\alpha(\beta)$ — положительный корень. При этом ясно, что он не равен α. Следовательно,

$$\sigma_\alpha : \Phi^+ \setminus \{\alpha\} \to \Phi^+ \setminus \{\alpha\}.$$

□

Предложение 3. *Как любые две системы положительных корней, так и любых две системы простых корней сопряжены относительно действия группы Вейля.*

Доказательство. Очевидно, что так как каждой системе положительных корней (то есть каждому отношению порядка) соответствует (и ровно одна) система простых корней, и наоборот, то достаточно доказать, что сопряжены относительно действия группы Вейля любые две системы положительных корней.

Рассмотрим исходную систему положительных корней $\Phi^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l, \dots, \alpha_n\}$, где первые l корней — простые. Пусть наряду с ней имеется другая система положительных корней (относительно некоторого другого порядка) $\Pi = \{\beta_1, \dots, \beta_l, \dots, \beta_n\}$.

Если все простые корни из системы Φ^+ положительны в системе Π, то есть $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \Pi$, то обе системы положительных корней совпадают, так как положительные корни есть неотрицательные линейные комбинации простых корней. Значит, существует некоторый простой корень α_i такой, что $-\alpha_i \in \Pi$.

Рассмотрим систему $\Phi_1^+ := \sigma_{\alpha_i}(\Phi^+) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, -\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n\}$. В этой системе ровно один корень стал из отрицательного положительным, и ровно один — из положительного отрицательным. Значит, система Φ_1^+ *ближе* к системе Π, чем система Φ^+ по следующему свойству близости — в ней строго больше простых корней, которые положительны в Π.

Таким образом, мы можем продолжать применять отражения — теперь к некоторому простому корню системы Φ_1^+, являющемуся отрицательным в Π, чтобы получить систему Φ_2^+, и так далее.

Благодаря тому, что на каждом шаге мы получаем систему, в которой все больше простых корней положительны в Π, через некоторое число шагов последовательными сопряжениями мы получим такую систему, в которой все простые корни положительны. Значит, она совпадает с Π, что и требовалось. □

Из доказанных утверждений получается полезное следствие: оказывается, для каждого корня найдется содержащая его система простых корней (т.е. каждый корень может играть роль простого корня).

Следствие 2. *Для данной системы простых корней Δ и данного корня β найдется такой элемент $w \in W$, что $w(\beta) \in \Delta$.*

Доказательство. Упражнение. □

1.6 Задачи

1. Дайте определение грани многогранника и ее размерности.

2. Докажите, что все отношения порядка на V исчерпываются описанием из примера. А именно, покажите, что для любого отношения порядка существует базис $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, относительно которого это отношение порядка является лексикографическим упорядочением.

3. Завершите доказательство теоремы 1.

4. Найдите системы простых и положительных корней для систем корней, соответствующих группам отражений $\mathbf{A}_n$ и $\mathbf{B}_n$ и $\mathbf{D}_n$.

5. Пусть Φ — система корней ранга n, и пусть $\Delta' \subset \Phi$ — набор n векторов из Φ, попарные углы между которыми равняются попарным углам между векторами системы простых корней $\Delta \subset \Phi$. Докажите, что тогда Δ' также является системой простых корней.

6. Докажите следствие 2.

2 Лекция 2. Дальнейшие свойства систем корней и группы Вейля

2.1 Группа W порождается простыми отражениями

У простых корней есть замечательное свойство: несмотря на то, что они обычно составляют лишь незначительную часть системы корней, отражения относительно них порождают всю группу W. Это похоже на ситуацию с группой диэдра, где группа порождается всего двумя отражениями.

Докажем это с общей ситуации.

Лемма 1. *Для всякого положительного корня $\gamma \in \Phi^+$ найдется корень $\alpha \in \Delta$, для которого $(\gamma, \alpha) > 0$.*

Доказательство. Предположим, что для всех простых корней $\alpha \in \Delta$ имеет место $(\gamma, \alpha) \leqslant 0$. Однако $\gamma = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$, где $c_\alpha \geqslant 0$.

Тогда

$$0 < (\gamma, \gamma) = \left(\gamma, \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha\right) = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha (\gamma, \alpha) \leqslant 0,$$

противоречие. □

Определение 8. Пусть $\beta \in \Phi$, $\beta = \sum\limits_{\gamma \in \Delta, c_\gamma \neq 0} c_\gamma \gamma$. *Высотой* корня β называется число $ht(\beta) = \sum c_\gamma$. В частности, высота любого простого корня равна единице.

Теорема 2. *Пусть Δ — система простых корней. Тогда $W = \langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$.*

Доказательство. Пусть $W' = \langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$ — подгруппа в W, порожденная простыми отражениями. Докажем, что она совпадает со всей группой.

Пусть $\beta \in \Phi^+$. Рассмотрим множество $W'(\beta) \cap \Phi^+$ (оно непусто, так как содержит β) и выберем в нем элемент γ минимальной высоты. Покажем, что $\gamma \in \Delta$, то есть любой положительный корень может быть переведен в простой с помощью лишь простых отраже ний.

Действительно, пусть γ — не простой, тогда рассмотрим корень γ и возьмем такой простой корень α, что $(\gamma, \alpha) > 0$ (который существует по доказанной выше лемме). Тогда $\gamma' = \sigma_\alpha(\gamma) = \gamma - \langle \gamma, \alpha \rangle \alpha$, корень γ' останется положительным, а высота его уменьшится. Противоречие с выбором корня γ.

Отсюда следует, что $W'(\Delta) = \Phi$.

Вспомним формулу $t\sigma_\alpha t^{-1} = \sigma_{t(\alpha)}$. Таким образом, чтобы получить отражение σ_β относительно произвольного корня $\beta \in \Phi$ нам требуется найти такой $w \in W'$, что $w(\alpha) = \beta$, где $\alpha \in \Delta$, откуда $w\sigma_\alpha w^{-1} = w_\beta$. Но левая часть принадлежит подгруппе W', откуда $W' = W$. □

Пусть Φ — система корней в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через W подгруппу в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, порожденную отражениями σ_α, $\alpha \in \Phi$. Согласно (R2) подгруппа W переставляет элементы множества Φ, которое согласно (R1) конечно и порождает $\mathbb{R}^l$. Это позволяет нам отождествить W с подгруппой симметрической группы на Φ; в частности, группа W конечна. Она называется *группой Вейля* для Φ и играет исключительную роль в дальнейшем изложении.

Лемма 2. *Пусть Φ — система корней в $\mathbb{R}^l$ с группой Вейля W. Если $\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ оставляет множество Φ инвариантным, то $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$ для всех $\alpha \in \Phi$, причем $\langle \beta, \alpha\rangle = \langle \sigma(\beta), \sigma(\alpha)\rangle$ для всех $\alpha, \beta \in \Phi$.*

2.2 Многогранные конусы и двойственность

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ — произвольный набор ненулевых векторов. Рассмотрим *многогранный конус*, порожденный этим набором, т. е. множество линейных комбинаций этих векторов с неотрицательными коэффициентами:

$$K = \{c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k \mid c_i \geqslant 0\} \subset V.$$

Можно рассмотреть двойственное множество

$$K^\vee = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha_i) \geqslant 0 \ \forall i\} = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \nu) \geqslant 0 \ \forall \mu \in K\},$$

которое также является конусом, порожденным векторами $\beta_1, \ldots, \beta_k$, где β_i ортогонален всем векторам α_j при $j \neq i$ и $(\alpha_i, \beta_i) > 0$.

Внутренностью $\operatorname{Int} K$ конуса K будем называть множество его внутренних точек (в стандартной топологии $\mathbb{R}^n$). Если конус невырожден (то есть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ порождают все пространство V), то $\operatorname{Int} K$ есть множество положительных линейных комбинаций векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$:

$$\operatorname{Int} K = \{c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k \mid c_i > 0\}.$$

Лемма 3. *Пусть K и L — два многогранных конуса. В этом случае $L \subset K$ тогда и только тогда, когда $K^\vee \subset L^\vee$.*

Доказательство. Упражнение. □

Обозначим через $-K$ образ конуса K при центральной симметрии относительно нуля.

Предложение 4. *Пусть K — многогранный конус. Тогда $\lambda \in K \cup -K$ тогда и только тогда, когда гиперплоскость $H_\lambda = \{\mu \in V \mid (\mu, \lambda) = 0\}$ не пересекается с конусом $\operatorname{Int} K^\vee$.*

Доказательство. Пусть L — конус, порожденный одним вектором λ. Тогда $L \subset K$, а $L^\vee$ есть полупространство, ограниченное плоскостью H_λ и содержащее вектор λ. Предложение следует из предыдущей леммы и того факта, что если $K^\vee \subset L^\vee$, то $\operatorname{Int} K^\vee \subset \operatorname{Int} L^\vee$. □

2.3 Камеры Вейля и фундаментальная область группы отражений

Теперь применим общие сведения о многогранных конусах, полученные в предыдущем пункте, к системе корней.

Фиксируем в Φ систему простых и систему положительных корней $\Delta \subset \Phi^+$. Пусть K — конус, порожденный системой Δ (или, что то же самое, системой Φ^+). Обозначим через D двойственный конус:

$$D = K^\vee = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) \geqslant 0 \text{ для любого } \alpha \in \Delta\}.$$

Поскольку простые корни составляют базис пространства V, оба конуса имеют число ребер $\dim V$, и невырожденны, так как не содержатся ни в каком подпространстве меньшей размерности.

Несложно показать, что всякая W-орбита пересекается с D.

Лемма 4. *Для всякого вектора $\lambda \in V$ найдется такой элемент $w \in W$, что*

$$\mu = w(\lambda) \in D.$$

Доказательство. Введем на V частичный порядок следующим образом: λ меньше либо равно μ, если $\mu - \lambda$ есть линейная комбинация векторов из Δ с неотрицательными коэффициентами.

Рассмотрим орбиту $W(\lambda)$ вектора λ. Пусть μ — максимальный относительно данного порядка элемент в этой орбите (вообще говоря, μ может быть не единственным). Применим к нему простое отражение σ_α:

$$\sigma_\alpha = \mu - \langle \mu, \alpha \rangle \alpha.$$

Вектор $\sigma_\alpha(\mu)$ также принадлежит орбите $W(\lambda)$. Поскольку элемент μ максимален, мы получаем, что $(\mu, \alpha) \geqslant 0$. Это выполнено для всякого простого корня $\alpha \in D$, следовательно, $\mu \in D$. $\square$

Рассмотрим множество открытых конусов $W(\operatorname{Int} D)$, получающихся из $\operatorname{Int} D$ сдвигом на элемент $w \in W$. Эти конусы называются *камерами Вейля.*

Предложение 5. 1. *Для любого корня $\alpha \in \Phi$ соответствующая ему гиперплокость H_α не пересекается ни с какой камерой Вейля $w(\operatorname{Int} D)$.*

2. *Объединение всех камер Вейля равняется всему пространству V за вычетом гиперплоскостей отражений относительно корней из Φ:*

$$W(\operatorname{Int} D) = V \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha.$$

3. *Пусть $\widetilde{\Delta} = \{\beta_1, \dots, \beta_r\} \subset \Phi$ — набор корней, составляющий базис пространства V, и пусть $\widetilde{K}$ — конус, порожденный этим набором. Предположим, что $\operatorname{Int} \widetilde{K}^\vee$ не пересекается ни с какой гиперплоскостью H_α при $\alpha \in \Phi$. Тогда $\widetilde{\Delta} = w(\Delta)$ и $\widetilde{\Delta}$ тоже является системой простых корней.*

Доказательство. 1. Для любого корня $\alpha \in \Phi$ верно, что либо он сам, либо противоположный к нему лежит в конусе K, порожденном Δ. В силу предложения 4 отсюда следует, что соответствующая гиперплоскость H_α не пересекается с $\operatorname{Int} D$. В силу W-инвариантности системы Φ это же верно и для любой другой камеры Вейля.

2. Возьмем какой-нибудь элемент $\lambda \in V \setminus (W(\operatorname{Int} D))$. В силу предыдущей леммы найдется такой элемент $w \in W$, что $w(\lambda) \in D \setminus \operatorname{Int} D$. Тогда по определению конуса D мы получаем, что $w(\lambda) \in H_\beta$, где β — некоторый простой корень. Значит, $\lambda \in H_{w^{-1}(\beta)}$, что и требовалось.

3. Пусть $\alpha \in \Phi$. Из предложения 4 следует, что либо α, либо $-\alpha$ лежит в конусе $\widetilde{K}$. Это значит, что α выражается через $\beta_1, \ldots, \beta_r$ с коэффициентами одного знака. Но согласно определению это и значит, что $\widetilde{\Delta}$ — это система простых корней. □

2.4 Углы между простыми корнями

Рассмотрим два простых корня α и β. Как мы знаем, угол между ними не может быть острым. Кроме того, этот угол должен рационально зависеть от π, так как в ином случае простые отражения углов α и β относительно друг друга породили бы бесконечное число корней. Значит, этот угол равен $\pi - \frac{k}{m}\pi$, где $0 < k/m \leqslant 1/2$.

Лемма 5. *Для двух простых корней α и β угол между ними равен $\pi - \pi/m$, где $m \geqslant 2$ — натуральное число.*

Доказательство. Как мы видим, осталось доказать, что если дробь k/m несократима, то $k = 1$.

Пусть это не так, $k > 1$. Без ограничения общности можно рассмотреть подсистему в системе корней, порожденную только корнями α и β, считая, что $\alpha = (1,0)$ на плоскости, а $\beta = (-\cos\frac{k}{m}\pi, \sin\frac{k}{m}\pi)$.

Тогда

$$\beta_1 := \sigma_\beta(\alpha) = (1,0) - 2\cos\frac{k}{m}\pi(-\cos\frac{k}{m}\pi, \sin\frac{k}{m}\pi) = (-\cos\frac{2k}{m}\pi, \sin\frac{2k}{m}\pi),$$

то есть угол между α и β_1 станет в два раза больше по модулю 2π, чем угол между α и β.

Таким образом, мы можем провести серию отражений, где каждый раз будем получать новые единичные векторы с углами $l(\pi - \frac{k}{m}\pi)$ к горизонтали по модулю 2π. Благодаря взаимной простоте k и m мы получим также и угол $\pi - \pi/m$ в процессе отражений. Пусть соответствующий корень —

$$\gamma = (-\cos\pi/m, \sin\pi/m) = a\alpha + b\beta = (a - b\cos\frac{k}{m}\pi, b\sin\frac{k}{m}\pi).$$

Так как $0 > \sin\pi/m < \sin\frac{k}{m}\pi$, то $0 < b < 1$.

С другой стороны, $\cos\pi/m = b\cos\frac{k}{m}\pi - a > \cos\frac{k}{m}\pi > 0$, откуда $a < 0$, что противоречит простоте корней α и β. □

Лемма 6. *Если задан набор попарных углов между векторами единичной длины, то эти векторы могут быть системой простых корней не более, чем для одной системы корней Φ.*

Доказательство. Мы уже доказали, что любой корень получается с помощью серии простых отражений относительно простых корней.

Пусть мы имеем в n-мерном пространстве набор из n линейно независимых единичных векторов, у которых известны все попарные углы: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Рассмотрим $\beta := \sigma_{\alpha_i}(\alpha_j)$. Понятно, что вектор β лежит в плоскости, порожденной векторами α_i и α_j:

$$\beta = a\alpha_i + b\alpha_j,$$

и мы, очевидно, знаем числа a и b. Но если мы знаем эти числа, то знаем и все углы между β и остальными α_k, $k \neq i, j$. Таким образом, к системе простых корней добавился новый корень, и мы снова знаем все углы между всеми корнями.

Значит, можно на каждом шаге добавлять по одному новому корню вида $\sigma_\alpha(\gamma)$, где α и γ — это некоторые два корня из текущего множества.

Когда все новые корни будут иметь кратные 2π углы с какими-то из текущих корней, процедура остановится.

Таким образом, мы по системе простых корней однозначно задали систему всех корней, что и требовалось. $\square$

2.5 Определение графов Кокстера

Как мы уже видели, группа отражений W порождается отражениями $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ относительно простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Эти отражения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sigma_i^2 = E, \quad (\sigma_i \sigma_j)^{n_{ij}} = E,$$

где число n_{ij} определяется углом между векторами α_i и α_j:

$$\angle(\alpha_i, \alpha_j) = \pi - \pi/n_{ij}.$$

Оказывается, что других соотношений, не следующих из этих, в группе отражений нет. Это утверждает следующая теорема, которую мы не будем доказывать в нашем курсе:

Теорема 3. *Группа W есть факторгруппа свободной группы, порожденной элементами $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$, по наименьшей нормальной подгруппе, содержащей левые части выписанных выше соотношений.*

Как мы видели ранее, вся информация о системе корней и соответствующей группе W задается набором чисел n_{ij}, то есть углами между простыми корнями. Эти данные можно наглядно представить следующим образом.

Определение 9. Пусть W — группа отражений, $\Phi \supset \Delta$ — соответствующие система корней и система простых корней. *Графом Кокстера*, построенным по группе отражений W (или по системе корней Φ), называется неориентированный граф с $|\Delta|$ вершинами (без кратным ребер и петель), ребра которого отмечены числами, не меньшими трех, определенный по следующему правилу:

— i-я и j-я вершины не соединены ребром, если $n_{ij} = 2$ (то есть простые корни α_i и α_j ортогональны);

— в противном случае i-я и j-я вершины соединены ребром, снабженным отметкой n_{ij}.

Условимся, что вместо ребра с отметкой 3 мы будем рисовать простое без числовой отметки. Это соглашение связано с тем, что большинство ребер в графе Кокстера снабжены отметкой 3; оно позволяет упростить обозначения.

Замечание 2. *Иногда вместо ребер с числовыми отметками используются кратные ребра. В таком случае вершины i и j соединяются ребром кратности $n_{ij} - 2$ (что согласуется с нашими обозначениями при $n_{ij} = 2$ и 3).*

Поскольку все системы простых корней в данной системе корней Φ сопряжены, граф Кокстера системы корней Φ зависит только от самой системы корней и не зависит от выбора системы простых и положительных корней в Φ.

Далеко не всякий граф с числовыми отметками на ребрах является графом Кокстера какой-либо группы отражений. С другой стороны ясно, что если по графу может быть восстановлена группа отражений, то она восстанавливается единственным образом.

Определение 10. Граф Кокстера с n вершинами называется *допустимым*, если он соответствует некоторой конечной группе отражений.

Очевидно, что для допустимости графа Кокстера необходимо, чтобы существовала система из n векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ в $\mathbb{R}^n$, попарные углы между которыми равнялись бы

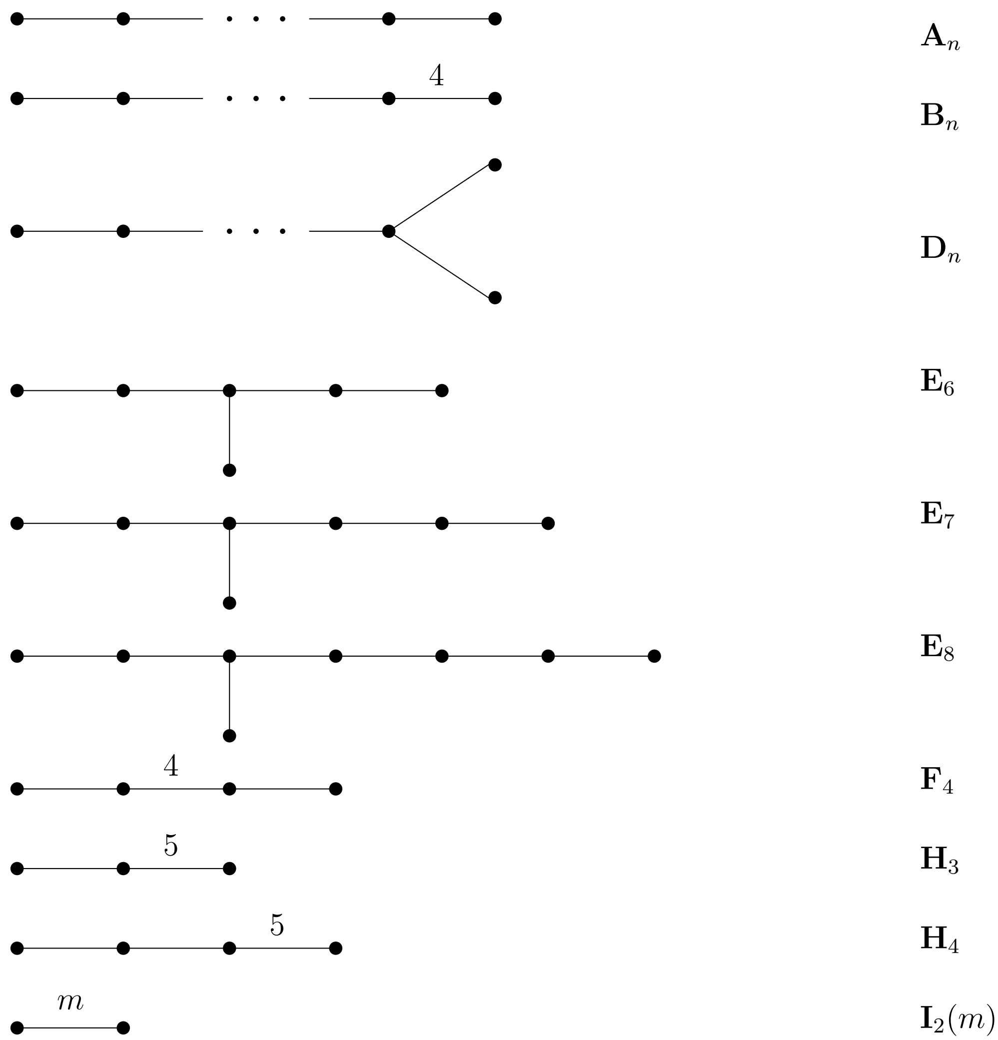
$$\angle(\alpha_i, \alpha_j) = \pi - \pi/n_{ij}.$$

Наша ближайшая цель — получить список всех допустимых графов Кокстера. Это даст нам полную классификацию конечных групп отражений.

2.6 Классификация конечных групп отражений: формулировка результата

Ответ на интересующий нас вопрос формулируется следующим образом:

Теорема 4. *Граф Кокстера является допустимым тогда и только тогда, когда каждая из его компонент связности принадлежит следующему списку:*



2.7 Доказательство теоремы: инструментарий

Нетрудно видеть, что можно ограничиться рассмотрением связных графов Кокстера: если граф несвязен, то соответствующая группа отражений (если она существует) распадается в прямое произведение нескольких групп отражений, каждая из которых соответствует связной компоненте графа Кокстера (соответственно, система корней распадается на несколько ортогональных подсистем). Поэтому достаточно описать все связные допустимые графы Кокстера. Группы отражений и их системы корней, соответствующие связным графам Кокстера, будем называть *неразложимыми*.

Общая стратегия нашего доказательства будет такова: мы выясним, каких подграфов не может быть в допустимом графе. В итоге мы придем к тому, что все графы, не содержащие этих запрещенных подграфов, суть в точности нарисованные выше графы. После этого нам останется лишь предъявить примеры групп отражений, соответствующих этим графам.

Для заданного графа Кокстера Γ будем искать описанную в определении систему, состоящую из единичных векторов. Нам известна матрица Грама

$$G(\Gamma) = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = ((\alpha_i, \alpha_j))$$

этой системы: на ее диагонали стоят единицы, а вне диагонали — неположительные числа

$$\cos(\pi - \pi/n_{ij}) = -\cos(\pi/n_{ij}).$$

Если два вектора β и γ разложены по базису из $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$:

$$\beta = \sum b_i \alpha_i, \quad \gamma = \sum c_i \alpha_i,$$

то их скалярное произведение равно

$$(\beta, \gamma) = (b_1, b_2, \ldots, b_l)(G(\Gamma)) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix}.$$

Матрица Грама системы векторов в пространстве должна быть положительно определена. Это дает нам весьма сильные ограничения на значения n_{ij}) (то есть на граф Кокстера), которые позволяют исключить некоторые графы. Для их исключения мы будем пользоваться тремя основными инструментами:

Положительность определителя матрицы Грама: $\det G(\Gamma) > 0$**.**

Неравенство Коши–Буняковского: $(\lambda, \mu)^2 < (\lambda, \lambda)(\mu, \mu)$ для любых двух не пропорциональных друг другу векторов λ, μ.

Теорема Пифагора: пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ — ортонормированная система векторов (не обязательно базис). Тогда для произвольного вектора выполняется неравенство

$$(\lambda, \lambda) \geqslant \sum_{i=1}^{k} (\lambda, \varepsilon_i)^2,$$

причем оно является строгим тогда и только тогда, когда $\lambda \notin \langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \rangle$.

2.8 Задачи

1. Докажите, что $(K^\vee)^\vee = K$.

2. Докажите лемму 3.

3. Нарисуйте систему корней типа $\mathbf{B}_2$, отметьте ее два простых корня, фундаментальный конус и камеры Вейля.

4. Докажите, что несовпадающие камеры Вейля не пересекаются.

3 Лекция 3. Доказательство теоремы о классификации систем корней

3.1 Доказательство теоремы: необходимость

В этом разделе мы в 10 шагов исключим некоторые недопустимые графы Кокстера. В результате останутся только те, которые перечислены в теореме. Тем самым в теореме будет доказана часть “только тогда”.

Шаг 1. Пусть Γ — допустимый граф Кокстера, и граф Γ' получается из Γ удалением некоторых вершин и всех примыкающих к ним ребер. Тогда граф Γ' допустим.
Доказательство. Это очевидно из геометрических соображений. □

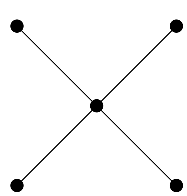
Шаг 2. Допустимый граф Кокстера не содержит циклов.
Доказательство. Рассмотрим вектор $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ и найдем его скалярный квадрат:

$$0 < (\alpha, \alpha) = \left(\sum \alpha_i, \sum \alpha_i\right) = n - 2\sum_{i<j} \cos(\pi/n_{ij}) \leqslant n - \sum_{\text{по всем ребрам}} 1.$$

Следовательно, число ребер не превосходит $n - 1$. □

Шаг 3. Допустимый граф Кокстера не может содержать:
а) вершину степени не меньше 4;
б) вершину степени 3, из которой исходит ребро с отметкой не меньше 4;
в) вершину, из которой исходят два ребра с отметками не меньше 4.
Доказательство. В силу шага 1 достаточно проверить, что ни один из трех минимальных графов, удовлетворяющих условиям а)–в), не является допустимым. Действительно, пусть исходный Γ содержит какой-либо такой подграф. Удалим все вершины, кроме входящих в этот подграф, и все исходящие из них ребра. Полученный граф либо содержит цикл (следовательно, недопустим в силу шага 2), либо имеет вид, описанный в условии.

а) Докажем, что граф



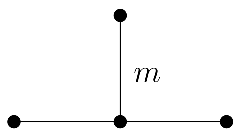
(возможно, с отметками на ребрах) не является допустимым. Обозначим векторы, соответствующие центральной и крайним вершинам, через α и $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$, соответственно. Последние четыре вектора образуют ортонормированную систему, а α не принадлежит их линейной оболочке.

Значит,

$$1 = (\alpha, \alpha) > \sum_{i=1}^{4} (\alpha, \alpha_i)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{4} (1/2)^2 = 1.$$

Противоречие.

б) Докажем, что граф



где $m \geqslant 4$ (возможно, с какими-то еще отметками на ребрах), не является допустимым.

Обозначим векторы, соответствующие простым крайним вершинам, через α_1, α_2, центральной вершине — через α, кратной крайней вершине — через β. Векторы $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ образуют ортонормированную систему, а α не принадлежит их линейной оболочке.

Значит,

$$1 = (\alpha, \alpha) > (\alpha, \alpha_1)^2 + (\alpha, \alpha_2)^2 + (\alpha, \beta)^2 \geqslant (1/2)^2 + (1/2)^2 + (1/\sqrt{2})^2 = 1.$$

Противоречие.

в) Упражнение. □

Шаг 4. Если в допустимом графе Γ имеется цепочка вершин, соединенных между собой простыми ребрами, причем никакие вершины, кроме первой и последней, более ни с чем не соединены, то эту цепочку можно "стянуть", заменив ее одной вершиной и оставив все остальные ребра и вершины без изменений. Полученный в результате граф $\widetilde{\Gamma}$ также будет допустимым.

Доказательство. Предъявим для графа $\widetilde{\Gamma}$ набор векторов с заданными скалярными произведениями. Этот набор получается из набора для Γ при помощи замены векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, соответствующих вершинам, которые образуют цепочку, на их сумму $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$. Действительно,

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} (\alpha_i, \alpha_i) - 2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant k-1} (\alpha_i, \alpha_{i+1}) = k - (k-1) = 1,$$

а для всякого вектора β, соответствующего вершине не из цепочки,

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta) \text{ или } (\alpha, \beta) = (\alpha_k, \beta),$$

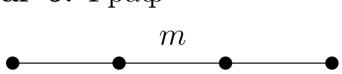
что и требовалось. □

Шаг 5. Допустимый граф содержит не более одной особенности.

Доказательство. Это следует из предыдущих двух шагов: если особенностей более одной, то рассмотрим цепочку, соединяющую ближайшие две особенности, и стянем ее; полученный граф будет недопустимым в силу шага 3. □

Дальнейшие четыре шага посвящены исключению некоторых подграфов с кратным ребром.

Шаг 6. Граф



не является допустимым при $m \geqslant 5$.

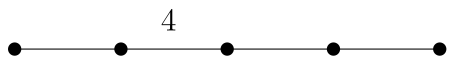
Доказательство. Предположим противное. Пусть вершинам, занумерованным слева направо, соответствуют векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$. Рассмотрим векторы $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2$ и $\gamma = 2\alpha_3 +$

α_4. Легко убедиться, что $(\beta,\beta)=(\gamma,\gamma)=3$, а $(\beta,\gamma)=-4\cos\frac{\pi}{m}$. Но $\cos\frac{\pi}{m}\geqslant\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Запишем неравенство Коши–Буняковского:

$$9=3\cdot 3=(\beta,\beta)\cdot(\gamma,\gamma)>(\beta,\gamma)^2\geqslant(1+\sqrt{5})^2=6+2\sqrt{5}>9.$$

Противоречие. $\square$

Шаг 7. Граф



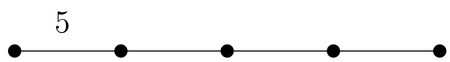
не является допустимым.

Доказательство. Предположим противное. Пусть вершинам, занумерованным слева направо, соответствуют векторы $\alpha_1,\ldots,\alpha_5$. Рассмотрим векторы $\beta=\alpha_1+2\alpha_2$ и $\gamma=3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5$. Видим, что $(\beta,\beta)=3$, $(\gamma,\gamma)=3^2+2^2+1^2-3\cdot 2-2\cdot 1=5$, а $(\beta,\gamma)=(2\alpha_2,3\alpha_3)=-6\cos\pi/4=-3\sqrt{2}$. Снова запишем неравенство Коши–Буняковского:

$$15=3\cdot 5=(\beta,\beta)\cdot(\gamma,\gamma)>(\beta,\gamma)^2=(3\sqrt{2})^2=18>15.$$

Противоречие. $\square$

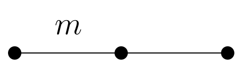
Шаг 8. Граф



не является допустимым.

Доказательство. Упражнение. $\square$

Шаг 9. Граф

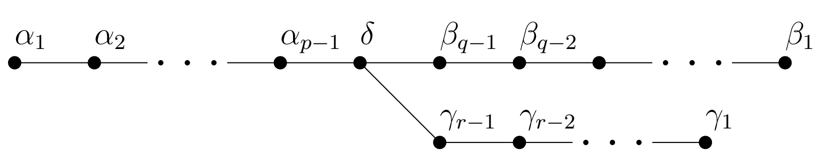


не является допустимым при $m\geqslant 6$.

Доказательство. Упражнение. $\square$

Мы получили, что если граф не содержит вершину степени 3, то он является одним из следующих: $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_n$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{H}_3$, $\mathbf{H}_4$, $\mathbf{I}_2(m)$.

Теперь разберем случай, когда в графе Кокстера есть вершина степени 3:



Шаг 10. Граф Кокстера с вершиной степени 3, состоящий из трех “щупалец”, длины которых равны $p-1$, $q-1$ и $r-1$, соответственно, является допустимым только тогда, когда для длин щупалец выполнено соотношение

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1.$$

Доказательство. Обозначим

$$\alpha := \sum_{i=1}^{p-1} i \cdot \alpha_i, \quad \beta := \sum_{i=1}^{q-1} i \cdot \beta_i, \quad \gamma := \sum_{i=1}^{r-1} i \cdot \gamma_i.$$

Тогда

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^{p-1} i^2 - \sum_{i=1}^{p-2} i(i+1) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Аналогично,

$$(\beta, \beta) = \frac{q(q-1)}{2}, \quad (\gamma, \gamma) = \frac{r(r-1)}{2}.$$

Видим, что векторы α, β, γ взаимно ортогональны, а вектор δ не лежит в их линейной оболочке. Применим теорему Пифагора:

$$1 > \frac{(\delta,\alpha)^2}{(\alpha,\alpha)} + \frac{(\delta,\beta)^2}{(\beta,\beta)} + \frac{(\delta,\gamma)^2}{(\gamma,\gamma)} =$$
$$= \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{p(p-1)} + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{q(q-1)} + \left(\frac{r-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{r(r-1)} =$$
$$= \frac{p-1}{2p} + \frac{q-1}{2q} + \frac{r-1}{2r} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right).$$

Финально это ровно дает неравенство

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

□

Несложно перечислить все решения этого уравнения в целых числах, больших единицы: (p, q, r) может быть равно $(2, 2, r)$ при произвольном $r \geqslant 2$, а также $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ и $(2, 3, 5)$. Первая серия дает нам графы Кокстера типа $\mathbf{D}_n$, а последние три — графы $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$ и $\mathbf{E}_8$.

Необходимость полностью доказана.

3.2 Доказательство теоремы классификации: достаточность

Последнее, что от нас требуется, — это выписать системы корней (и простых корней) для всех допустимых графов Кокстера.

Системы корней, соответствующие сериям $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_n$ и $\mathbf{D}_n$, мы уже изучали в первой лекции.

Система корней $\mathbf{I}_2(m)$ довольно очевидна — это векторы, которые идут из нуля в вершины правильного $2m$-угольника, с простыми корням $\alpha_1 = (1, 0)$ и $\alpha_2 = (-\cos \pi/m, \sin \pi/m)$.

Значит, осталось найти системы корней для графов $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{H}_3$ и $\mathbf{H}_4$.

Будем предъявлять эти системы корней.

Оказывается, что последние три удобно представлять себе как подмножества в теле кватернионов.

Система корней $\mathbf{F}_4$.

Отождествим четырехмерное пространство $\mathbb{R}^4$ с пространством кватернионов $\mathbb{H}$, сопоставив вектору с координатами (a, b, c, d) кватернион $z = a + bi + cj + dk$. На пространстве кватернионов определено *сопряжение*:

$$z \mapsto \overline{z} = a - bi - cj - dk.$$

Модулем кватерниона называется действительное неотрицательное число

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Тем самым, геометрически множество кватернионов с данным ненулевым модулем r — это трехмерная сфера $\mathbf{S}^3$ радиуса r.

Для кватернионов очевидно верно равенство $|zw| = |z| \cdot |w|$, поэтому кватернионы с модулем 1 образуют группу по умножению, которую мы будем обозначать через $\mathrm{Sp}\,(1)$.

Рассмотрим внутри тела кватернионов такие 48 векторов: первые 24 из них будут составлять множество

$$\{\pm 1,\ \pm\mathbf{i},\ \pm\mathbf{j},\ \pm\mathbf{k},\ \frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})\},$$

где знаки расставляются всевозможными способами, а оставшиеся 24 элемента имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm z \pm w),\ \text{где } z, w \in \{1,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}.$$

Проверим, что то, что получилось, является системой корней.

Аксиома (R1) очевидна, так что реально проверять нужно только аксиому (R2).

Для этого рассмотрим разные случаи.

(1) Если мы отражаем вектор $\pm z$ относительно вектора $\pm w$, то так как векторы z и w ортогональны, то получается вектор $\pm z$.

(2) Если мы отражаем вектор $\pm z$ относительно вектора $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$, то

$$\sigma_{\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})}(\pm z) = \pm z \pm \frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}),$$

что даст вектор вида $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$, где при элементе z просто поменяется знак.

(3) Если мы отражаем вектор $\pm z$ относительно вектора $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm z \pm w)$, то

$$\sigma_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm z \pm w)}(\pm z) = \pm z - \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm z \pm w) = \pm w.$$

Если же мы отражаем вектор $\pm z$ относительно вектора $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm t \pm w)$, то данные векторы просто ортогональны.

(4) Если мы отражаем вектор $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$ относительно некоторого другого вектора того же вида, то они либо ортогональны (два знака совпадают, два различны), либо

коллинеарны (все знаки совпадают или все различны), либо у них совпадают и различны три и один знак. Проще всего рассмотреть этот случай на примере:

$$\sigma_{\frac{1}{2}(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})}\frac{1}{2}(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}) = \frac{1}{2}(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) - \frac{2}{2}\frac{1}{2}(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}) = \mathbf{k}.$$

Аналогичный результат получится в других случаях.

(5) Если мы отражаем вектор $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$ относительно вектора $\pm z$, получим

$$\sigma_{\pm z}\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}) = \frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}) \pm z,$$

что дает вектор того же вида, но с другим знаком при z.

(6) Если мы отражаем вектор $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$ относительно вектора $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm z \pm w)$, то либо они ортогональны, либо получим

$$\sigma_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm z \pm w)}\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}) = \frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k}) \pm \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm z \pm w),$$

что дает вектор того же вида, где при z и w меняются знаки.

Остальные случаи рассматриваются аналогично, так что будем считать доказанным, что эти 48 векторов образуют систему корней.

Теперь рассмотрим векторы

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j}), \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j}-\mathbf{k}), \quad \alpha_3 = \mathbf{k}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(1-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}),$$

углы между которыми, очевидно, дают граф Кокстера вида $\mathbf{F}_4$.

Осталось показать, что это простая система корней для всей нашей системы. Очевидно, что система составляет базис тела кватернионов, так что надо показать, что каждый корень есть неотрицательная или неположительная линейная комбинация векторов базиса.

Действительно, $\mathbf{j} = \sqrt{2}\alpha_2 + \alpha_3$, $\mathbf{i} = \sqrt{2}\alpha_1 + \sqrt{2}\alpha_2 + \alpha_3$, $1 = 2\alpha_4 + \sqrt{2}\alpha_1 + \sqrt{2}\alpha_2 + \alpha_3$, то есть для корней первого типа все получается.

Если в корне вида $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$ знак при 1 положителен, то этот корень тоже положителен, поэтому нам надо представить все корни вида $\frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$ как положительную линейную комбинацию простых корней. Но действительно, любой такой корень есть корень α_4, к которому прибавлено какое-то подмножество из корней $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, уже представленных как положительная линейная комбинация корней $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, что нам и требовалось.

Осталось рассмотреть корни вида $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm z \pm w)$, у которых положителен знак при z, где z идет раньше w в списке $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Они очевидно представляются в виде нужной комбинации: $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j}-\mathbf{k})$ $(= \alpha_2)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j}+\mathbf{k})$ $(= \alpha_2 + \sqrt{2}\alpha_3)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{k})$ $(= \alpha_1 + \alpha_2)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{k})$ $(= \alpha_1 + \alpha_2 + \sqrt{2}\alpha_3)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$ $(= \alpha_1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ $(= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \sqrt{2}\alpha_3)$, а все корни вида $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm w)$ очевидно получаются из $\sqrt{2}\alpha_4$ прибавлением нужного количества $\sqrt{2}\mathbf{i}$, $\sqrt{2}\mathbf{j}$, $\sqrt{2}\mathbf{k}$.

Таким образом, мы доказали, что построили систему корней $\mathbf{F}_4$.

Перед построением систем корней $\mathbf{H}_3$ и $\mathbf{H}_4$ заметим, что первая является подсистемой для второй, поэтому если построить систему корней $\mathbf{H}_4$, то система $\mathbf{H}_3$ построится автоматным матически.

Применим интересный способ построения системы $\mathbf{H}_4$, также внутри тела кватернионов.

Нас будут интересовать конечные подгруппы в $\mathbb{H}$. Ясно, что если G — такая подгруппа, то $G \subset \mathrm{Sp}\,(1)$. Оказывается, имеет место следующее неожиданное утверждение.

Лемма 7. *Пусть $G \subset \mathrm{Sp}\,(1)$ — конечная подгруппа четного порядка. Тогда G является системой корней.*

Доказательство. По теореме Силова в группе четного порядка всегда найдется элемент порядка два. Единственный элемент в $\mathbb{H}$ порядка два — это -1. Следовательно, $-1 \in G$.

Поскольку G — группа, из этого следует, что если $\lambda \in G$, то $-\lambda \in G$. Итак, для G выполнена аксиома (R1) системы корней.

Пусть $\alpha \in G$. Нетрудно убедиться, что отображение $M_\alpha : \lambda \mapsto \alpha\lambda$ есть движение $\mathbb{H}$, переводящее 1 в α и сохраняющее G. Также группу G сохраняет симметрия $\sigma_1(\lambda) = -\overline{\lambda}^{-1}$ (заметим, что $\overline{\lambda} = -\lambda^{-1}$ для $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(1)$). Поэтому для любого α отражение $\sigma_\alpha = M_\alpha \sigma_1 M_\alpha^{-1}$ сохраняет группу G.

Итак, аксиома (R2) также имеет место. $\square$

Это, в частности, означает, что можно было доказывать, что выписанное нами выше множество является системой корней, не проверяя, что оно сохраняется всеми отражениями, а просто доказывая, что оно является группой.

Система корней $\mathbf{H}_4$.

Рассмотрим векторы

$$\{\pm 1,\ \pm\mathbf{i},\ \pm\mathbf{j},\ \pm\mathbf{k},\ \frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})\},$$

которые встречались уже нам выше, и добавим к ним еще множество векторов, которое получается из вектора

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mathbf{i} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathbf{j}\right)$$

четными перестановками координат (то есть перестановками из группы A_4) и всевозможными сменами знаков при всех трех координатах.

Получается, что у нас есть 24 вектора первого типа и $12 \cdot 8 = 96$ второго, то есть всего 120 векторов.

Как всем известно, векторы $\{\pm 1,\ \pm\mathbf{i},\ \pm\mathbf{j},\ \pm\mathbf{k}\}$ образуют группу кватернионов $\mathbb{Q}_8$, добавим к ним векторы $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})$. Если любой такой вектор умножить на вектор вида $\pm z$, очевидно, получится вектор такого же вида (сменятся некоторые знаки). Поэтому надо проверить произведение двух векторов последнего вида. Очевидно, все случаи делятся в зависимости от того, сколько знаков в суммах совпадают.

(1) Совпадают все знаки (или все различны):

$$\frac{1}{2}(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})^2 = \frac{1}{4}(1-1-1-1+2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}+\mathbf{ij}+\mathbf{ji}+\mathbf{jk}+\mathbf{kj}+\mathbf{ik}+\mathbf{ki}) = \frac{1}{2}(-1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}),$$

аналогично для других расстановок знаков.

(2) Три знака совпадают, один разных (или наоборот — один совпадает и три разных):

$$\frac{1}{2}(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\frac{1}{2}(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}) = \frac{1}{4}(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{ij}+\mathbf{ji}-\mathbf{ik}+\mathbf{ki}-\mathbf{jk}+\mathbf{kj}) = \mathbf{j},$$

аналогично для других совпадений знаков.

(3) Два знака совпадают, два различны:

$$\frac{1}{2}(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\frac{1}{2}(1+\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}) = \frac{1}{4}(1-1+1+1+2\mathbf{i}-\mathbf{ij}+\mathbf{ji}-\mathbf{ik}+\mathbf{ki}) = \frac{1}{2}(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}).$$

Таким образом, выписанное множество является подгруппой в кватернионах. Добавим элементы последнего типа и оставим проверку, что это все векторы образуют группу, в качестве упражнения.

Выпишем систему простых корней:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\mathbf{j}+\mathbf{k}\right), \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathbf{j}+\mathbf{k}\right)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\mathbf{k}\right), \qquad \alpha_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\mathbf{k}\right)$$

Оставим в качестве упражнения проверку, что эти корни являются простыми для выписанной системы и что их граф Кокстера — искомый.

Теперь осталось убедиться в существовании систем корней $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$, что сводится к существованию последней системы.

Система корней $\mathbf{E}_8$.

Пусть $e_1, \ldots, e_8$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^8$. Начнем с решетки L', состоящей из всех векторов $\sum\limits_{i=1}^{8} c_i e_i$, для которых $c_i \in \mathbb{Z}$ и сумма всех коэффициентов $\sum\limits_{i=1}^{8} c_i$ четна. Теперь рассмотрим минимальную решетку, содержащую L' и вектор $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{8} e_i$:

$$L = L' + \mathbb{Z}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} e_i\right).$$

Заметим, что квадрат длины любого вектора в этой решетке четен (непосредственная проверка). Обозначим через Φ множество векторов, квадрат длины которых минимален, то есть равен двум. Множество Φ состоит из 240 векторов:

$$\pm e_i \pm e_j \ (i<j) \ \text{ и } \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \pm e_i \text{ (число плюсов четно).}$$

Это Φ оказывается системой корней с простыми корнями

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$$
$$\alpha_2 = e_1 + e_2,$$
$$\alpha_i = e_{i-1} - e_{i-2}, \quad 3 \leqslant i \leqslant 8.$$

Итак, для каждого Кокстера из списка основной теоремы мы предъявили соответствующую систему корней. Это дает нам полную классификацию конечных систем корней (и конечных групп отражений).

Теорема доказана полностью. □

3.3 Задачи

1. Докажите пункт (в) шага 3.

2. Докажите шаг 8 в теореме.

3. Докажите шаг 9 в теореме.

4. Завершите проверку того, что векторы системы $\mathbf{H}_4$ являются подгруппой в $\mathrm{Sp}\,(1)$.

5. Проверьте, что выписанные корни системы $\mathbf{H}_4$ действительно являются системой простых корней, причем нужного типа.

6. Проверьте, что выписанные корни системы $\mathbf{E}_8$ являются системой корней с соответствующей системой простых корней.

4 Лекция 4. Классификация правильных многогранников

В этой лекции мы дадим определение правильного многогранника в n-мерном пространстве, после чего опишем все правильные многогранники. Это будет сделано следующим образом. Сначала мы покажем, что группа симметрий правильного многогранника есть группа отражений. Более того, эта группа обязана удовлетворять дополнительному условию — ее граф Кокстера линеен, то есть не содержит ветвлений. Далее мы выясним, что по этой группе можно восстановить и сам правильный многогранник, причем не более чем двумя способами. При этом два многогранника с одной и той же группой симметрий будут двойственны друг другу.

4.1 Правильные многогранники и их группы симметрий

Определение 11. Пусть M — многогранник в $\mathbb{R}^n$, а $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{n-1}$ — множества его 0-мерных граней (вершин), одномерных граней (ребер), …, граней размерности $n-1$ (гиперграней). Последовательность граней $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$, где $F_i \in \mathcal{F}_i$, а $F_n = M$, называется *флагом*, если $F_i \subset F_{i+1}$ для всех i от 0 до $n-1$.

После этого указанное свойство групп симметрий можно принять в качестве определения правильного многогранника:

Определение 12. Многогранник M называется *правильным*, если действие $\operatorname{Sym} M$ на флагах транзитивно, то есть любой флаг можно перевести в любой другой.

Пусть M — правильный многогранник в n-мерном пространстве. Рассмотрим какую-нибудь его грань F. По определению она тоже является правильным многогранником, и ее симметрии — это в точности симметрии многогранника M, оставляющие грань F на месте.

Если симметрия грани F является отражением (как преобразование плоскости, содержащей F), то она продолжается до отражения всего пространства, содержащего многогранник M.

Теорема 5. *Группа* $\operatorname{Sym} M$ *порождается* n *отражениями.*

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по размерности многогранника. База индукции очевидна — при $n = 1$ единственный правильный многогранник — это отрезок, его группа симметрий порождается одним отражением.

Пусть M — многогранник размерности n. Рассмотрим две его гиперграни F и F', пересекающиеся по грани E размерности $n-2$. Достаточно доказать, что $\operatorname{Sym} M$ порождается подгруппой $\operatorname{Sym} F$ и отражением σ относительно грани E (точнее, относительно гиперплоскости, проходящей через E и центр многогранника). Почему такое σ есть и как оно устроено? Рассмотрим флаг, который начинается с какой-то вершины в грани E, содержит грань E и заканчивается гипергранью F. С другой стороны возьмем флаг с точно таким же началом, который заканчивается гипергранью F'. Рассмотрим движение многогранника, переводящие один из этих флагов в другой. Оно поточечно оставляет грань E на месте, переводит центр масс многогранника в себя и переводит грань F в F'. Значит, оно тождественно действует на гиперграни, проходящей через E и центр многогранника, при этом переводит F в F', то есть является отражением (именно отражением σ).

Обозначим через Γ группу, порожденную отражением σ и $\operatorname{Sym} F$, и будем доказывать, что $\Gamma = \operatorname{Sym} M$.

Сначала докажем, что Γ содержит отражение относительно любой грани E' размерности $n-2$, принадлежащей F (обозначим это отражение через σ').

Действительно, в силу транзитивности действия $\operatorname{Sym} F$ на гранях данной размерности существует преобразование $g \in \operatorname{Sym} F$, переводящее E в E'. Тогда σ' записывается как результат сопряжения отражения σ при помощи элемента g:

$$\sigma' = g \circ \sigma \circ g^{-1},$$

следовательно, $\sigma' \in \Gamma$.

Теперь докажем, что Γ содержит все преобразования, переводящие грань F' в себя. Действительно, они все имеют вид

$$g' = \sigma \circ g \circ \sigma^{-1},$$

где $g \in \operatorname{Sym} F'$, Выбирая в качестве g всевозможные симметрии грани F, мы будем получать в качестве g' всевозможные симметрии грани F'. Следовательно, $\operatorname{Sym} F' \subset \Gamma$.

Те же самые рассуждения можно провести, заменив F на F', а F' — на произвольную грань, смежную с F', и так далее. В итоге получим, что Γ содержит все симметрии всех гиперграней нашего многогранника и все симметрии относительно его граней размерности $n-2$.

Теперь рассмотрим произвольное преобразование $g \in \operatorname{Sym} M$ и некоторую гипергрань F многогранника M. Мы уже знаем, что имеется композиция отражений относительно граней размерности $n-2$, переводящая F в $g(F)$. Обозначим ее через w; согласно доказанному, $w \in \Gamma$. Композиция $h = w^{-1} \circ g$ переводит гипергрань F в себя, поэтому $h \in \operatorname{Sym} F \subset \Gamma$. Следовательно, $g = w \circ h \in \Gamma$. Значит, $\Gamma = \operatorname{Sym} M$, что и требовалось. $\square$

4.2 Образующие группы $\operatorname{Sym} M$ и соотношения между ними

Предыдущая теорема (вернее, ее доказательство) дает нам возможность предъявить образующие группы $\operatorname{Sym} M$ в явном виде. Для этого фиксируем произвольный флаг $(F_0, F_1, \ldots, F_n)$. Пусть $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — центры граней флага (в частности, $c_0 = F_0$, а c_n совпадает с центром масс всего многогранника).

Для каждого $i = 1, \ldots, n$ обозначим через H_i гиперплоскость, проходящую через все эти точки, кроме c_{i-1} (такой сдвиг нумерации оправдан тем, что хочется нумеровать гиперплоскости числами от 1 до n, а не от 0 до $n-1$). Рассмотрим набор $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ отражений относительно этих гиперплокостей.

Из нашего построения следует, что каждая гиперплоскость H_i содержит все грани F_j при $j \leqslant i-2$ и перпендикулярна всем граням F_l при $l \geqslant i$ (так как отрезок, соединяющий центр $(i-1)$-мерной грани с центром i-мерной грани, перпендикулярен этой $(i-1)$-мерной грани). Если ограничить отражение σ_i на i-мерное подпространство, содержащее грань F_i, то на нем но действует как отражение относительно грани F_{i-2}.

Мы получили следующие результат.

Следствие 3. *Описанные выше отражения* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *порождают группу* $\operatorname{Sym} M$.

Теперь выясним, каким соотношениям удовлетворяют эти образующие.

Определение 13. Пусть $(F_0, \ldots, F_n)$ — некоторый флаг правильного многогранника M и $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Число k-мерных граней, содержащихся в F_{k+1} и содержащих F_{k-2}, обозначим через p_k. (При этом мы формально полагаем $F_{-1} = \emptyset$). Число $(k-1)$-мерных граней, заключенных между F_{k+1} и F_{k-2}, также равно p_k (оставим в качестве упражнения). Набор $(p_1, \ldots, p_{n-1})$ называется *символом Шлефли* многогранника M.

Очевидно, что данное определение не зависит от выбора флага.

Пример 4. Символ Шлефли куба равен $(4, 3)$. Действительно, $p_1 = 4$, так как каждая грань содержит 4 ребра и 4 вершины, $p_2 = 3$, поскольку каждая вершина содержится ровно в трех ребрах и трех гранях. Символы Шлефли тетраэдра, октаэдра, икосаэдра и додекаэдра равны $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$ и $(5, 3)$, соответственно.

Предложение 6. *Пусть* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *— система образующих группы* $\operatorname{Sym} M$*, построенная в начале этого пункта. Тогда*

1) $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ *при* $|i-j| > 1$;

2) *порядок элемента* $\sigma_i\sigma_{i+1}$ *равен* p_i*, где* $(p_1, \ldots, p_{n-1})$ *— символ Шлефли многогранника* M.

Доказательство. 1) Докажем, что гиперплоскости отражений σ_i и σ_j перпендикулярны. Пусть k таково, что $i < k < j$. Тогда гиперплоскость H_i перпендикулярна грани F_{k-1}, а гиперплокость H_j содержит грань F_{k-1}. Значит, гиперплоскости H_i и H_j перпендикулярны.

2) Гиперплоскости H_i и H_{i+1} содержат $(i-2)$-мерную грань F_{i-2}. Это сразу означает, что движение $\sigma_i\sigma_{i+1}$ поточечно оставляет F_{i-2} на месте.

Отрезок $[c_{i-2}, c_{i-1}]$ содержится в гиперплоскости H_{i+1}, поэтому отражение σ_{i+1} поточечно оставляет его на месте. При этом отражение σ_i переводит грань F_{i-1} в соседнюю грань (с пересечением F_{i-2}), поэтому композиция $\sigma_i\sigma_{i+1}$ переводит отрезок $[c_{i-2}, c_{i-1}]$ в отрезок $[c_{i-2}, c'_{i-1}]$ с концом на соседней грани.

Таким образом, композиция отражений σ_i и σ_{i+1} является поворотом вокруг $(i-2)$-мерной грани F_{i-2} на угол $2\pi/m$, где m — это количество $(i-1)$-мерных (или i-мерных) граней, сходящихся в F_{i-2}, то есть $m = p_i$. Значит, порядок элемента $\sigma_i\sigma_{i+1}$ действительно равен p_i.

Заметим, в частности, что отражения с соседними номерами не коммутируют, так как $p_i \geqslant 3$. $\square$

Возникает естественная гипотеза: $\operatorname{Sym} M$ есть группа отражений, соответствующая графу Кокстера с n вершинами, в котором между каждыми двумя последовательными вершинами с номерами i и $i+1$ имеется ребро с отметкой p_i, а никакие другие вершины между собой не соединены. Мы докажем, что это действительно так. Для этого нам только нужно показать, что построенные σ_i являются *простыми отражениями*.

4.3 Система корней группы $\mathrm{Sym}\, M$

Возьмем произвольный флаг $(F_0', F_1', \dots, F_n')$ многогранника M и фиксируем центры его граней c_i'. Для каждого $i = 1, \dots, n$ возьмем гиперплоскость, проходящую через все c_j', кроме c_{i-1}'. Теперь рассмотрим вектор α единичной длины, перпендикулярный этой гиперплоскости и направленный в полупространство, содержащее пропущенный центр грани c_{i-1}'. Обозначим множество всех таких векторов, полученных при всевозможных выборах флагов и номеров пропущенных граней i, через Φ.

Лемма 8. 1. *Множество Φ является системой корней.*

2. *Группа отражений W, построенная по системе корней Φ, совпадает с группой $\mathrm{Sym}\, M$.*

Proof. 1. Упражнение.

2. Группа W порождена отражениями σ_α при всех $\alpha \in \Phi$. Из предыдущего пункта мы знаем, что построенная так система образующих $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ группы $\mathrm{Sym}\, M$ лежит в W; значит, $\mathrm{Sym}\, M \subset W$. С другой стороны, любое из рассматриваемых отражений сохраняет многогранник M, поэтому $W \subset \mathrm{Sym}\, M$. ■

Пусть, как и прежде, c_i — центры граней нашего фиксированного флага $(F_0, F_1, \dots, F_n)$. Обозначим через β_i единичный вектор, перпендикулярный гиперплоскости, проходящей через все c_j при $j \neq i-1$ и лежащей в том же полупространстве, что и c_{i-1}.

Лемма 9. *Множество $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ является системой простых корней для системы корней Φ.*

Доказательство. Пусть H_i^+ — полупространство, ограниченное гиперплоскостью H_i и содержащее вектор β_i (или, что то же самое, точку c_{i-1}). Рассмотрим *фундаментальный конус*

$$D := \bigcap_{i=1}^{n} H_i^+.$$

По определению D есть конус, двойственный к конусу, порожденному векторами $\beta_1, \dots, \beta_n$. Можно убедиться (оставим в качестве упражнения), что $\mathrm{Int}\, D$ не пересекается ни с какой из гиперплоскостей H_α при произвольном $\alpha \in \Phi$. Тогда утверждение леммы следует из пункта 3 предложения 5 второй лекции:

Пусть $\widetilde{\Delta} = \{\beta_1, \dots, \beta_r\} \subset \Phi$ — набор корней, составляющий базис пространства V, и пусть $\widetilde{K}$ — конус, порожденный этим набором. Предположим, что $\mathrm{Int}\, \widetilde{K}^\vee$ не пересекается ни с какой гиперплоскостью H_α при $\alpha \in \Phi$. Тогда $\widetilde{\Delta}$ является системой простых корней.
□

Итак, мы доказали теорему о классификации групп симметрий правильных многогранников, заявленную в начале этого пункта:

Теорема 6. *Группа симметрий $\mathrm{Sym}\, M$ правильного многогранника M является группой отражений. Ее граф Кокстера линеен и связен. Числовая отметка на ребре графа Кокстера, соединяющем вершины i и $i+1$, равна p_i, где $(p_1, \dots, p_{n-1})$ — символ Шлефли многогранника M.*

Таким образом, мы имеем следующий набор групп симметрий правильных многогранников:

— $\mathbf{A}_n$ с символом Шлефли $(3, 3, 3, \dots, 3)$ (симметрическая группа S_{n+1});

— $\mathbf{B}_n$ с символом Шлефли $(3, 3, \dots, 3, 4)$ (полупрямое произведение групп S_n и $\mathbb{Z}^n$, где вторая нормальна);

— $\mathbf{F}_4$ с символом Шлефли $(3, 4, 3)$ (группа порядка $1152 = 2^7 \cdot 3^2$);

— $\mathbf{H}_3$ с символом Шлефли $(3, 5)$ (группа порядка $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$);

— $\mathbf{H}_4$ с символом Шлефли $(3, 3, 5)$ (группа порядка $14400 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$);

— $\mathbf{I}_2(m)$ с символом Шлефли (m) (группа диэдра D_m).

4.4 Построение правильного многогранника по группе его симметрий

В предыдущей части этой лекции мы решали следующую задачу: как описать группу симметрий $\operatorname{Sym} M$ для заданного правильного многогранника M? Сейчас мы займемся обратной задачей — будем восстанавливать правильный многогранник по группе его симметрий.

Пусть M — правильный многогранник, $(F_0, F_1, \dots, F_n)$ — некоторый его флаг. По этим данным мы построили фундаментальный конус D многогранника M и доказали, что он является замыканием некоторой камеры Вейля группы $\operatorname{Sym} M$. При этом M однозначно определяется точками $c_0, \dots, c_{n-1}$, лежащими на ребрах конуса D, — эти точки являются центрами граней F_i выбранного флага. Тем самым ребра фундаментального конуса являются пронумерованными.

Далее, гипергрань F_{n-1} проходит через все точки $c_0, \dots, c_{n-1}$ и перпендикулряна прямой $c_{n-1}c_n$. Таким образом, по фундаментальному конусу D с пронумерованными ребрами многогранник M восстанавливается однозначно с точностью до подобия (отвечающего выбору точки c_{n-1} на соответствующем ребре). Просто понимаем, что вершина конуса — это точка c_n, далее выбирается точка c_{n-1} и через нее проводится гиперплоскость, перпендикулярная ребру. Точки пересечения гиперплоскости с ребрами конуса — это нужные нам точки $c_0, \dots, c_{n-1}$.

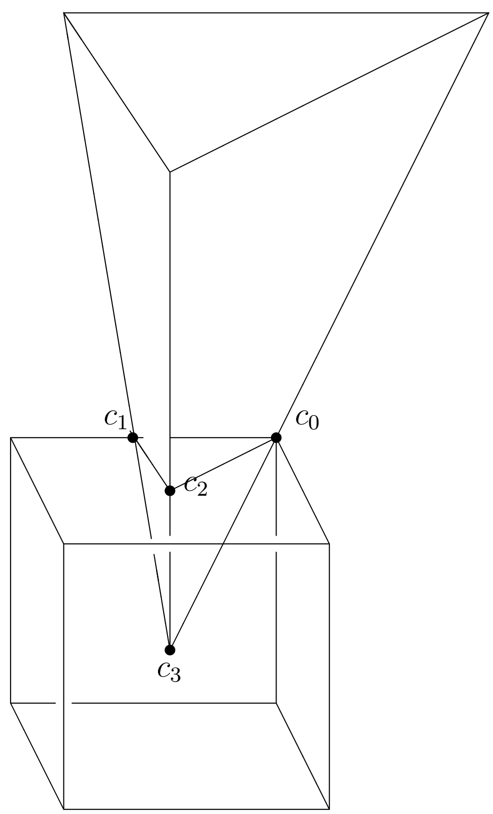
Точка c_{n-1} выбирается на ребре фундаментального конуса, отвечающем *висячей вершине* графа Кокстера. Таких вершин две. Поэтому при задании правильного многогранника графом Кокстера существенную роль играет его ориентация — указание того, какая висячая вершина отвечает первому отражению σ_1, а какая — последнему σ_n.

Определение 14. Линейный связный граф Кокстера, в котором одна из висячих вершин объявлена началом, а другая — концом, называется *ориентированным*.

Теорема 7. *Каждый ориентированный линейный связный граф Кокстера соответствует ровно одному правильному многограннику (с точностью до подобия). Символ Шлефли этого многогранника равен последовательности отметок на ребрах данного графа Кокстера, прочитанной начиная с начальной вершины.*

Доказательство. *Существование.* Рассмотрим систему корней Φ, соответствующую заданному графу Кокстера. Пусть W — соответствующая группа отражений, $\beta_1, \dots, \beta_n$ — система простых корней в Φ, D — конус, двойственный к конусу, порожденному простыми

Figure 1: Восстановление куба по его фундаментальному конусу



корнями. Рассмотрим ребро r конуса D, полученное как пересечение всех гиперплоскостей H_i отражений относительно β_i при $1 \leqslant i \leqslant n-1$ (то есть гиперплоскостей всех простых отражений, кроме последнего). Пусть Π — гиперплоскость, перпендикулярная к этому ребру, а Π^- — полупространство с границей Π, содержащее вершину конуса D. Возьмем все полупространства, получаемые из Π^- действием элементов из W, и рассмотрим множество

$$M = \bigcup_{w \in W} w \cdot \Pi^-.$$

Это многогранник, группой симметрий которого является W. Теперь осталось убедиться, что W транзитивно действует на флагах многогранника M.

Это напрямую следует из равенства

$$M = W \cdot (\Pi^- \cap D).$$

Доказательство этого равенства оставим в качестве упражнения.

Утверждение о символе Шлефли следует из конструкции системы образующих группы W, описанной выше.

Единственность. Как мы видели выше, $M = W \cdot C$, где C — симплекс, полученный в результате пересечения фундаментального конуса D с полупространством Π^-, перпендикулярным его заданному ребру. Ясно, что все такие симплексы подобны, следовательно, подобны и получаемые из них многогранники.

При изменении ориентации графа Кокстера многогранник переходит в двойственный. Таким образом, несимметричные линейные связные графы Кокстера $\mathbf{B}_n$, $\mathbf{H}_3$, $\mathbf{H}_4$ соответствуют парам двойственных многогранников, а симметричные $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{I}_2(m)$ — самодвойственным многогранникам. $\square$

Итак, мы получили полную классификацию правильных многогранников. Ее можно сформулировать следующим образом.

Теорема 8. *В пространстве произвольной размерности существуют три правильных многогранника, символы Шлефли которых равны* $(3,3,\ldots,3)$, $(4,3,\ldots,3)$ *и* $(3,3,\ldots,3,4)$ *соответственно (их мы будем называть регулярными). Кроме того, в малых размерностях имеются следующие исключительные многогранники.*

Случай $n = 2$: *правильный* m*-угольник, соответствующий символу Шлефли* (m), *с группой симметрий типа* $\mathbf{I}_2(m)$.

Случай $n = 3$*: правильные додекаэдр и икосаэдр, соответствующие символам Шлефли* $(5,3)$ *и* $(3,5)$; *их группа симметрий имеет тип* $\mathbf{H}_3$.

Случай $n = 4$: *один самодвойственный многогранник с символом Шлефли* $(3,4,3)$ *и группой симметрий типа* $\mathbf{F}_4$ *и два двойственных многогранника с символами Шлефли* $(5,3,3)$ *и* $(3,3,5)$ *и группой симметрий типа* $\mathbf{H}_4$.

Построим явно три регулярных правильных многогранника в $\mathbb{R}^n$.

Определение 15. 1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}$ набор из $n+1$ точки с координатами $(0,0,\ldots,1,\ldots,0,0)$ (одна координата равна единице, остальные — нули). Выпуклая оболочка этих точек есть

n-мерный многогранник, лежащий в плоскости $\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i = 1$. Этот многогранник называется *n-мерным симплексом*,

2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ набор из 2^n точек с координатами $(\pm 1, \ldots, \pm 1)$ при всевозможных выборах знаков. Выпуклая оболочка этих точек называется *n-мерным кубом*.

3. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ набор из $2n$ точек вида $(0, \ldots, 0, \pm 1, 0, \ldots, 0)$. Их выпуклая оболочка называется *n-мерным кокубом*.

В заключение предъявим без доказательства конструкции двух из трех исключительных многогранников — 24-гранника типа $\mathbb{F}_4$ и 600-гранника типа $\mathbb{H}_3$ (третий исключительный многогранник — 120-гранник — будет получаться как двойственный к последнему). Мы их уже встречали ранее, но в ином виде.

Теорема 9. 1. *Элементы*

$$\left\{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}, \frac{1}{2}(\pm 1 \pm \mathbf{i} \pm \mathbf{j} \pm \mathbf{k})\right\} \subset \mathbb{H},$$

где знаки расставляются всевозможными способами, лежат в вершинах правильного 24*-гранника в* $\mathbb{R}^4$.

2. 120 *корней системы* $\mathbf{H}_4$*, рассмотренных в предыдущей лекции, лежат в вершинах правильного* 600*-гранника.*

4.5 Упражнения

1. В правильном многограннике M число k-мерных граней, содержащихся в F_{k+1} и содержащих F_{k-2}, обозначим через p_k. Докажите, что число $(k-1)$-мерных граней, заключенных между F_{k+1} и F_{k-2}, также равно p_k.

2. Докажите пункт 1 леммы 8.

3. Докажите, что D из леммы 9 является фундаментальной областью для группы $\operatorname{Sym} M$.

4. Докажите равенство
$$M = W \cdot (\Pi^- \cap D).$$
Указание: воспользуйтесь леммой 4 из лекции 2.

5. Докажите, что симплекс, куб и кокуб — это регулярные правильные многогранники, перечисленные в теореме 8.

5 Лекция 5. Алгебры Ли, основные понятия

5.1 Определения и первые примеры

Определение 16. Векторное пространство L над полем $\mathbb{F}$ с операцией $L \times L \to L$, обозначаемой $(x, y) \mapsto [x, y]$ и называемой *скобкой* или *коммутатором* элементов x и y, называется *алгеброй Ли* над полем $\mathbb{F}$, если выполняются следующие аксиомы:

(L1) операция коммутирования билинейна;

(L2) $[x, x] = 0$ для всех $x \in L$;

(L3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ для всех $x, y, z \in L$ (*тождество Якоби*).

Заметим, что из аксиом (L1) и (L2), примененных к элементу $[x + y, x + y]$, следует соотношение коммутативности

$$[x, y] = -[yx].$$

Алгебры Ли L и L' над полем $\mathbb{F}$ будем называть *изоморфными*, если существует изоморфизм векторных пространств $\varphi : L \to L'$, удовлетворяющий соотношению

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \text{ для всех } x, y \in L$$

(и тогда φ называется изоморфизмом алгебр Ли).

Также очевидно определение подалгебры в L: подпространство K пространства L называется подалгеброй, если для всех $x, y \in K$ выполнено $[x, y] \in K$.

Мы в лекциях будем рассматривать исключительно алгебры Ли, векторное пространство которых конечномерно над полем $\mathbb{F}$. Это будет всегда подразумеваться, если не указано противное.

Если V — конечномерное пространство над $\mathbb{F}$, то рассмотрим его кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} V$ (кольцо матриц, если фиксировать базис пространства). Определим новую операцию $[x, y] = xy - yx$, называемую *скобкой* элементов x и y. С этой операцией $\operatorname{End} V$ становится алгеброй Ли над $\mathbb{F}$ (простая проверка). Чтобы отличать эту новую алгебраическую структуру от прежней, ассоциативной, мы обозначим через $\mathfrak{gl}(V)$ пространство $\operatorname{End} V$, рассматриваемое как алгебра Ли.

Любая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$ называется *линейной алгеброй Ли.* Если ввести в пространстве V базис, то в алгебре $\mathfrak{gl}(V)$ базисом будет система матричных единиц E_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, а соотношения для коммутаторов будут иметь вид

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{il} E_{kj}.$$

Теперь рассмотрим четыре очень важных примера классических алгебр Ли — $\mathbf{A}_l, \mathbf{B}_l, \mathbf{C}_l$ и $\mathbf{D}_l$.

1. Алгебра Ли типа $\mathbf{A}_l$: Пусть $\dim V = l+1$. Множество эндоморфизмов пространства V. с нулевым следом обозначим $\mathfrak{sl}(V)$ или $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{F})$. Множество $\mathfrak{sl}(V)$ является подалгеброй в $\mathfrak{gl}(V)$ и называется *специальной линейной алгеброй Ли.* Стандартным базисом этой алгебры является базис, состоящий из всех матричных единиц E_{ij}, где $i \neq j$, и из всех элементов $H_i := E_{ii} - E_{i+1,i+1}$, $i = 1, \ldots, l-1$.

2. Алгебра Ли типа $\mathbf{C}_l$: Пусть $\dim V = 2l$, и пусть $(v_1, \ldots, v_{2l})$ — базис. Определим невырожденную кососимметрическую форму f на пространстве V посредством матрицы

$s = \begin{pmatrix} 0 & E_l \\ -E_l & 0 \end{pmatrix}$. *Симплектическая алгебра*, обозначаемая $\mathfrak{sp}(V)$ или $\mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{F})$, по определению состоит из всех эндоморфизмов x пространства V, удовлетворяющих условию $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$. Легко можно проверить, что множество $\mathfrak{sp}(V)$ замкнуто относительно коммутирования. На матричном языке условие симплектичности для $x = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, где $m, n, p, q \in \mathfrak{gl}_l(\mathbb{F})$, состоит в том, что $sx = x^T s$, то есть $n^T = n$, $p^T = p$, $m^T = -q$. Теперь легко найти базис в $\mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{F})$. Возьмем диагональные матрицы $E_{ii} - E_{l+i,l+i}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, и все матрицы $E_{ij} - E_{l+i,l+j}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant l$, а также $E_{i,l+i}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, и $E_{i,l+j} + E_{j,l+i}$, $1 \leqslant i < j \leqslant l$. Суммируя, получаем

$$\dim \mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{F}) = 2l^2 + l.$$

3. Алгебра Ли типа $\mathbf{B}_l$: Пусть размерность $\dim V = 2l+1$ нечетна, а f — невырожденная симметрическая билинейная форма на V с матрицей

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_l \\ 0 & E_l & 0 \end{pmatrix}.$$

Ортогональная алгебра $\mathfrak{o}(V)$ или $\mathfrak{o}_{2l+1}(\mathbb{F})$ состоит из всех эндоморфизмов пространства V, удовлетворяющих условию

$$f(x(v), w) = -f(v, x(w))$$

(то же требование, что и для случая $\mathbf{C}_l$).

Если мы разобьем x на блоки так же, как s, скажем,

$$x = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{pmatrix},$$

то равенство $sx = -x^T s$ превратится в следующую совокупность условий: $a = 0$, $c_1 = -b_2^T$, $c_2 = -b_1^T$, $q = -m^T$, $n^T = -n$, $p^t = -p$.

В качестве базисных элементов возьмем, во-первых, l диагональных матриц $E_{ii} - E_{l+i,l+i}$, $2 \leqslant i \leqslant l+1$. Добавим $2l$ матриц, в которых ненулевыми являются только первая строка и первый столбец: $E_{1,l+i+1} - E_{i+1,1}$ т $E_{1,i+1} - E_{l+i+1,1}$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Подматрице $q = -m^t$ сопоставим (как и для $\mathbf{C}_l$) матрицы $E_{i+1,j+1} - E_{l+j+1,l+i+1}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant l$. Подматрице n сопоставим $E_{i+1,l+j+1} - E_{j+1,l+i+1}$, $1 \leqslant i < j \leqslant l$, а подматрице p — $E_{i+l+1,j+1} - E_{j+l+1,j+1}$, $1 \leqslant j < i \leqslant l$. Общее количество базисных элементов равно $2l^2 + l$.

4. Алгебра Ли типа $\mathbf{D}_l$. Здесь мы получим другую ортогональную алгебру. Она строится так же, как и $\mathbf{B}_l$, с теми отличиями, что размерность $\dim V = 2l$ четна, а s имеет более простой вид

$$s = \begin{pmatrix} 0 & E_l \\ E_l & 0 \end{pmatrix}.$$

Построение базиса этой алгебры оставим в качестве упражнения.

Кроме перечисленных важных алгебр нам будут интересны и полезны в дальнейшем еще несколько линейных алгебр Ли: это алгебра Ли $\mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$ всех верхнетреугольных матриц;

алгебра Ли $\mathfrak{n}_n(\mathbb{F})$ всех строго верхнетреугольных матриц (треугольных матриц с нулевой диагональю); алгебра $\mathfrak{d}_n(\mathbb{F})$ всех диагональных матриц.

5.2 Алгебры Ли дифференцирований

Некоторые линейные алгебры Ли возникают наиболее естественно при рассмотрении дифференцирований алгебр. Под $\mathbb{F}$-алгеброй (не обязательно ассоциативной) будем понимать просто векторное пространство $\mathfrak{A}$ над $\mathbb{F}$, наделенное билинейной операцией $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, обозначение которой обычно опускается. Дифференцированием в алгебре $\mathfrak{A}$ мы называем линейное отображение $\delta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, удовлетворяющее обычному правилу дифференцирования

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b.$$

Легко проверяется, что совокупность $\operatorname{Der}\mathfrak{A}$ всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}$ является векторным подпространством в $\operatorname{End}\mathfrak{A}$. Легко проверить, что коммутатор двух дифференцирований снова является дифференцированием (хотя их обычное произведение не обязательно им является). Таким образом, $\operatorname{Der}\mathfrak{A}$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{A})$.

Поскольку алгебра Ли L является $\mathbb{F}$-алгеброй в указанном смысле, то определена алгебра Ли $\operatorname{Der} L$. Некоторые дифференцирования вполне естественно возникают следующим образом. Если $x \in L$, то отображение $y \mapsto [x, y]$ является эндоморфизмом пространства L, который мы обозначим $\operatorname{ad} x$. В действительности $\operatorname{ad} x \in \operatorname{Der} L$, так как можно переписать тождество Якоби в следующем виде:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]].$$

Дифференцирования такого вида называются внутренними, а все остальные — внешними.

Отображение $L \to \operatorname{Der} L$, имеющее вид $x \mapsto \operatorname{ad} x$, называется присоединенным представлением алгебры L; оно для нас будет крайне важно.

5.3 Идеалы алгебр Ли

Подпространство I алгебры Ли L называется идеалом в L, если из того, что $x \in L$, $y \in I$ следует, что $[x, y] \in I$. В теории алгебр Ли идеалы играют роль нормальных подгрупп в группах или двухсторонних идеалов в ассоциативных кольцах — они являются ядрами гомоморфизмов.

Очевидно, что 0 и сама алгебра L являются идеалами. Еще один пример — центр алгебры L:

$$Z(L) := \{x \in L \mid [x, y] = 0 \text{ для всех } y \in L\}.$$

Другой важный пример — производная алгебра, обозначаемая через $[L, L]$ и аналогичная коммутанту группы. Она состоит из всех линейных комбинаций коммутаторов $[x, y]$ и, очевидно, является идеалом.

Если I, J — два идеала алгебры Ли, то

$$I + J := \{x + y \mid x \in I, y \in J$$

также является идеалом. Аналогично идеалом является и

$$[I, J] := \left\{ \sum x_i y_i \mid x_i \in I, y_i \in J \right\}.$$

Производная алгебра $[L, L]$ — частный случай этой конструкции.

Если в алгебре L нет идеалов, кроме нее самой и нуля, причем $[L, L] \neq 0$, то L называется простой алгеброй. Ясно, что если L — простая алгебра, то $Z(L) = 0$ и $L = [L, L]$.

Пример 5. Пусть $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$. Выберем стандартный базис в виде трех матриц

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножение в алгебре полностью определяется равенствами

$$[x, y] = h, \quad [h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y.$$

Пусть I — ненулевой идеал в L и $ax + by + ch$ — произвольный ненулевой элемент в I. Дважды применяя к этому элементу оператор $\operatorname{ad} x$, получаем $-2bx \in I$, а применяя дважды оператор $\operatorname{ad} y$, получаем $-2ay \in I$. Поэтому если a и b отличны от нуля, то I содержит x или y и, значит, $I = L$. С другой стороны, если $a = b = 0$, то $0 \neq ch \in I$ и поэтому $h \in I$, что снова влечет $I = L$. Мы заключаем, что L — простая алгебра.

В случае когда алгебра Ли L не проста (и не одномерна), можно профакторизовать ее по ненулевому собственному идеалу I, получив алгебру Ли меньшей размерности. Конструкция факторалгебры L/I формально та же, что и для факторкольца: L/I совпадает с факторпространством, а коммутатор определяется формулой

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I.$$

Последнее определение корректно. В самом деле, из равенств

$$x + I = x' + I, \quad y + I = y' + I$$

вытекает, что

$$x' = x + u, \quad y' = y + v, \qquad u, v \in I.$$

Отсюда

$$[x', y'] = [x, y] + ([u, y] + [x, v] + [u, v]),$$

и потому

$$[x', y'] + I = [x, y] + I,$$

так как все члены в скобках принадлежат идеалу I.

Нормализатор подалгебры (и вообще подпространства) K алгебры L определяется условием

$$N_L(K) := \{x \in L \mid [x, K] \subset K\}.$$

Ввиду тождества Якоби $N_L(K)$ является подалгеброй в L; ее можно описать как наибольшую подалгебру в L, в которой K является идеалом. Если $K = N_L(K)$, то подалгебра K называется самонормализуемой.

Централизатором подмножества X в L называется множество

$$C_L(X) = \{x \in L \mid [x, X] = 0\}.$$

Опять-таки из тождества Якоби следует, что $C_L(X)$ является подалгеброй в L.

5.4 Гомоморфизмы и представления

Следующее определение не является неожиданным.

Линейное преобразование $\varphi : L \to L'$ (где L и L' — алгебры Ли над $\mathbb{F}$) называется гомоморфизмом, если

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \text{ для всех } x, y \in L.$$

Гомоморфизм φ называется мономорфизмом, если $\ker \varphi = 0$, эпиморфизмом — если $\Im\varphi = L'$ и изоморфизмом — φ является одновременно и мономорфизмом, и эпиморфизмом. Как и ожидалось, $\ker \varphi$ является идеалом в L; в самом деле, если $\varphi(x) = 0$, а $y \in L$ — произвольный элемент, то

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = 0.$$

Также несложно проверить, что $\Im\varphi$ является подалгеброй в L'.

Как и в других алгебраических теориях, существует естественное взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами и идеалами: гомоморфизму φ соответствует идеал $\ker \varphi$, а идеалу I — каноническое отображение

$$\pi : L \to L/I, \quad x \mapsto x + I.$$

Представлением алгебры Ли L называется гомоморфизм $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$, где V — векторное пространство над $\mathbb{F}$. Важнейшим примером является присоединенное представление

$$\operatorname{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L),$$

введенное выше. Оно сопоставляет элементу x оператор $\operatorname{ad} x$, где $\operatorname{ad} x(y) = [x, y]$.

Очевидно, что ad — линейное отображение. Проверим, что оно сохраняет коммутатор:

$$\begin{aligned} [\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y](z) &= \operatorname{ad} x \operatorname{ad} y(z) - \operatorname{ad} y \operatorname{ad} x(z) = \\ &= \operatorname{ad}([y, z]) - \operatorname{ad} y([x, z]) = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = \\ &= [x, [y, z]] + [[x, z], y] = [[x, y], z] = \operatorname{ad}[x, y](z). \end{aligned}$$

Ядро эндоморфизма ad состоит из всех таких элементов $x \in L$, для которых $\operatorname{ad} x = 0$, то есть $[x, y] = 0$ при всех $y \in L$. Поэтому $\ker \operatorname{ad} = Z(L)$. Отсюда вытекает интересное следствие: если алгебра проста, то $Z(L) = 0$, откуда отображение ad является вложением. Это означает, что любая простая алгебра Ли изоморфна линейной.

5.5 Автоморфизмы

Автоморфизм алгебры Ли L — это ее изоморфизм на себя. Группа всех автоморфизмов обозначается $\operatorname{Aut} L$. Важные примеры автоморфизмов возникают, когда L — линейная алгебра Ли. Если $g \in \mathrm{GL}(V)$ обратимый эндоморфизм пространства V, причем $gLg^{-1} = L$, то непосредственно проверяется, что отображение $x \mapsto gxg^{-1}$ является автоморфизмом алгебры L.

Рассмотрим теперь случай $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$. Предположим, что для элемента $x \in L$ оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен, то есть $(\operatorname{ad} x)^k = 0$ при некотором $k > 0$. Тогда разложение экспоненты линейного преобразования в ряд над полем $\mathbb{C}$ имеет смысл и над полем $\mathbb{F}$, так как этот ряд будет содержать конечное число членов:

$$\exp(adx) = 1 + \operatorname{ad} x + \frac{(\operatorname{ad} x)^2}{2!} + \frac{(\operatorname{ad} x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\operatorname{ad} x)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Мы утверждаем, что $\exp(\operatorname{ad} x) \in \operatorname{Aut} L$. Более того, результат останется верным, если заменить $\operatorname{ad} x$ на любое нильпотентное дифференцирование δ из L.

Для доказательства применим знакомое нам правило Лейбница

$$\frac{\delta^n}{n!}(xy) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\delta^i x \frac{1}{(n-i)!}\delta^{n-i} y.$$

Мы имеем (считая, что $\delta^k = 0$)

$$\exp\delta(x)\exp\delta(y) = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i x}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\delta^j y}{j!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{2k-2}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\delta^i x}{i!}\frac{\delta^{n-i} y}{(n-i)!}\right) = \sum_{n=0}^{2k-2} \frac{\delta^n(xy)}{n!} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\delta^n(xy)}{n!} = \exp\delta(xy).$$

Обратимость элемента $\exp\delta$ следует (обычным образом) из явного выражения для обратного элемента:

$$\exp\delta \cdot \exp(-\delta) = E.$$

Автоморфизм вида $\exp(\operatorname{ad} x)$, где оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен, называется внутренним; подгруппа в $\operatorname{Aut} L$, порожденная такими элементами, обозначается через $\operatorname{Int} L$, и ее элементы также называются внутренними автоморфизмами. Это нормальная подгруппа: если $\varphi \in \operatorname{Aut} L$, $x \in L$, то $\varphi(\operatorname{ad} x)\varphi^{-1} = \operatorname{ad}\varphi(x)$, откуда следует, что

$$\varphi\exp(\operatorname{ad} x)\varphi^{-1} = \exp(\operatorname{ad}\varphi(x)).$$

5.6 Разрешимые алгебры Ли

Естественно изучать алгебру Ли с помощью ее идеалов. Определим следующую последовательность идеалов алгебры L (производный ряд):

$$L^{(0)} := L, \quad L^{(1)} := [L, L], \quad L^{(2)} := [L^{(1)}, L^{(1)}], \quad \ldots, \quad L^{(i+1)} := [L^{(i)}, L^{(i)}].$$

Алгебра L называется разрешимой, если $L^{(n)} = 0$ для некоторого натурального n. В частности, абелевость влечет разрешимость, а вот простые алгебры заведомо не разрешимы.

В определенном смысле общим примером разрешимой алгебры служит алгебра верхнетреугольных матриц $\mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$. Очевидный базис этой алгебры состоит из матричных единиц E_{ij}, где $i \leqslant j$; ее размерность равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Чтобы показать, что алгебра $L = \mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$ разрешима, найдем ее производный ряд. Для начала имеем $[E_{ii}, E_{il}] = E_{il}$, поэтому $\mathfrak{n}_n(\mathbb{F}) \subset [L, L]$. Так как

$$\mathfrak{t}_n(\mathbb{F}) = \mathfrak{d}_n(\mathbb{F}) + \mathfrak{n}_n(\mathbb{F}),$$

а $\mathfrak{d}_n(\mathbb{F})$ — абелева подалгебра, то $\mathfrak{n}_n(\mathbb{F})$ является производной алгеброй для L.

В алгебре $\mathfrak{n}_n(\mathbb{F})$ естественно определено понятие уровня, а именно, уровень элемента E_{ij} равен числу $j - i$. В формуле для коммутаторов будем предполагать, что $i < j$, $k < l$. Без ограничения общности можно считать, что $i \neq l$. Тогда $[E_{ij}, E_{kl}] = E_{il}$ при $j = k$ и нулю в противном случае. Как следствие, любой элемент E_{il} является коммутатором двух матриц, уровни которых в сумме дают его уровень. Отсюда следует, что $^{(2)}$ порождается элементами E_{ij}, уровень которых не меньше двух, а $L^{(m)}$ — элементами, уровень которых не меньше 2^{m-1}. Очевидно, рассматриваемая алгебра разрешима.

Теперь приведем несколько простых свойств разрешимых алгебр.

Предложение 7. *Пусть L — алгебра Ли.*

(a) *Если алгебра L разрешима, то разрешимы все ее подалгебры и гомоморфные образы.*

(b) *Если I — такой разрешимый идеал в L, что алгебра L/I разрешима, то разрешима и сама алгебра L.*

(c) *Если I и J — разрешимые идеалы в L, то идеал $I + J$ также разрешим.*

Доказательство. Первые два пункта оставим в качестве упражнения (они полностью аналогичны такому же утверждению для групп).

Докажем пункт (c). Одна из стандартных теорем о гомоморфизмах устанавливает изоморфизм между алгебрами $(I+J)/J$ и $I/(I\cap J)$ (докажите ее в качестве упражнения). Вторая из алгебр разрешима как гомоморфный образ идеала I. Значит, разрешима и алгебра $(I + J)/J$. Теперь разрешимость алгебры $I + J$ следует из пункта (b). $\square$

5.7 Задачи

1. Пусть L совпадает с вещественным векторным пространством $\mathbb{R}^3$. При $x, y \in L$ положим $[x, y]$ равным векторному произведения $x \times y$. Проверьте, что L является алгеброй Ли. Выпишите ее структурные константы относительно стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$.

2. Постройте базис алгебры Ли типа $\mathbf{D}_l$.

3. Покажите, что при $\operatorname{char} F = 0$ каждая из классических алгебр $L = \mathbf{A}_l, \mathbf{B}_l, \mathbf{C}_l, \mathbf{D}_l$ равняется $[L, L]$.

4. Докажите, что с точностью до изоморфизма существует единственная алгебра Ли над $\mathbb{F}$ размерности три, производная алгебра которой имеет размерность один и лежит в $Z(L)$.

5. Докажите пункты (a) и (b) предложения 7.

6. Докажите, что если I и J — идеалы алгебры Ли L, то имеет место изоморфизм

$$(I + J)/J \cong I/(I \cap J).$$

6 Полупростые алгебры Ли. Теоремы Энгеля, Ли

6.1 Радикал алгебры Ли

Рассмотрим алгебру Ли L и ее максимальный разрешимый идеал S (такой разрешимый идеал, который не содержится ни в одном большем разрешимом идеале). Если I — любой другой разрешимый идеал в L, то из предложения 7 прошлой лекции вытекает, что $S + I = S$ (ввиду максимальности идеала S), то есть $I \subset S$. Это доказывает существование единственного максимального (то есть наибольшего) разрешимого идеала, называемого *радикалом* алгебры L и обозначаемого через $\operatorname{Rad} L$. Если $L \neq 0$ и $\operatorname{Rad} L = 0$, то алгебра L называется *полупростой*. Например, простая алгебра является полупростой, потому что в ней нет идеалов, кроме нуля и ее самой, и она не разрешима. Отметим, что если алгебра L не разрешима, то есть $L \neq \operatorname{Rad} L$, то алгебра $L/\operatorname{Rad} L$ полупроста (примените второй пункт предложения 7 прошлой лекции).

Мы будем изучать именно полупростые алгебры Ли.

6.2 Нильпотентные алгебры Ли и теорема Энгеля

Определение разрешимости воспроизводит соответствующее понятие из теории групп, восходящее к Абелю и Галуа. Наоборот, понятие нильпотентной группы было построено уже по образцу соответствующего понятия из теории алгебр Ли.

Определим последовательность идеалов алгебры Ли L (*убывающий* или *нижний центральный ряд*), полагая

$$L^0 := L, \quad L^1 := [L, L], \quad L^2 := [L, L^1], \quad \dots, \quad L^k := [L, L^{k-1}].$$

Алгебра L называется *нильпотентной*, если $L^n = 0$ при некотором натуральном n. Например, любая абелева алгебра нильпотентна.

Очевидно, что $L^{(i)} \subset L^i$ для всех i, поэтому нильпотентные алгебры разрешимы.

Обратное, однако, неверно. Рассмотрим снова алгебру $L = \mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$. Из рассуждений предыдущей лекции видно, что

$$L^{(1)} = L^1 = \mathfrak{n}_n(\mathbb{F}), \quad L^2 = [L, L^1] = L^1,$$

поэтому $L^i = L^1$ для всех $i \leqslant 1$.

С другой стороны, легко видеть, что алгебра $M = \mathfrak{n}_n(\mathbb{F})$ нильпотентна. Действительно, M^1 порождается элементами E_{ij}, уровень которых не меньше 2, M^2 — элементами уровня не меньше трех, и так далее.

Предложение 8. *Пусть L — алгебра Ли.*

(a) *Если алгебра L нильпотентна, то все ее подалгебры и гомоморфные образы также нильпотентны.*

(b) *Если нильпотентна алгебра $L/Z(L)$, то нильпотентна и алгебра L.*

(c) *Если алгебра L нильпотентна и $L \neq 0$, то $Z(L) \neq 0$.*

Доказательство. (a) Тут доказательство ничем не отличается от доказательства про разрешимость.

(b) Пусть $L^n \subset Z(L)$. Тогда

$$L^{n+1} = [L, L^n] \subset [L, Z(L)] = 0.$$

(c) Последний ненулевой член убывающего центрального ряда содержится в центре алгебры L. $\square$

Условие нильпотентности может быть сформулировано и по-другому: при некотором n (зависящем только от L)

$$\operatorname{ad} x_1 \operatorname{ad} x_2 \ldots \operatorname{ad} x_n(y) = 0 \text{ для всех } x_i, y \in L.$$

В частности,

$$(\operatorname{ad} x)^n = 0 \text{ для всех } x \in L.$$

Если теперь x — элемент произвольной алгебры Ли L, то назовем x ad *-нильпотентным*, если эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. На этом языке предыдущее условие можно сформулировать так: если алгебра L нильпотентна, то все ее элементы ad-нильпотентны.

Замечательно, что верно и обратное.

Теорема 10 (Энгель). *Если все элементы алгебры Ли L ad -нильпотентны, то алгебра L нильпотентна.*

Чуть позже мы приведем доказательство.

С помощью теоремы Энгеля легко доказать нильпотентность алгебры $\mathfrak{n}_n(\mathbb{F})$, не вычисляя ее убывающий центральный ряд в явном виде:

Лемма 10. *Пусть $x \in \mathfrak{gl}(V)$ — нильпотентный эндоморфизм. Тогда эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ также нильпотентен.*

Доказательство. С элементом x можно связать два эндоморфизма пространства $\operatorname{End} V$ — умножение слева и справа: $\lambda_x(y) = xy$ и $\rho_x(y) = yx$. Эти эндоморфизмы нильпотентны, поскольку нильпотентен элемент x. При этом очевидно, что λ_x и ρ_x коммутируют. В любом кольце (в данном случае, в кольце $\operatorname{End}(\operatorname{End} V)$) сумма и разность коммутирующих нильпотентных элементов нильпотентна. Поэтому отображение $\operatorname{ad} x = \lambda_x - \rho_x$ нильпотентно. $\square$

Заметим, что матрица в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ легко может оказаться ad-нильпотентной, не будучи нильпотентной (например, единичная матрица).

Приступим к доказательству теоремы Энгеля, которая будет следовать из такой (полезной самой по себе) теоремы:

Теорема 11. *Пусть L — подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, где пространство V конечномерно. Если L состоит из нильпотентных эндоморфизмов и $V \neq 0$, то существует такой ненулевой вектор $v \in V$, что $L(v) = 0$.*

Доказательство. Применим индукцию по размерности алгебры. Случаи $\dim L = 0$ и $\dim L = 1$ очевидны.

Пусть $K \neq L$ — некоторая подалгебра в L.

По только что доказанной лемме 10 подалгебра K действует (посредством оператора ad) как алгебра Ли нильпотентных линейных преобразований на векторном пространстве L, а как следствие — и на факторпространстве L/K.

По предположению индукции на факторпространстве L/K существует вектор $x+K \neq K$, аннулируемый образом подалгебры K в $\mathfrak{gl}(L/K)$. Это в точности означает, что $[y,x] \in K$ при всех $y \in K$, тогда как $x \notin K$. Другими словами, подалгебра K не совпадает со своим нормализатором $N_L(K)$.

Пусть теперь K — максимальная собственная подалгебра в L. Из предыдущего следует, что $N_L(K) = L$ то есть K является идеалом в L. Если $\dim L/K > 1$, то прообраз в L одномерной подалгебры из L/K (которая всегда существует) будет собственной подалгеброй, строго включающей K, что противоречит предположению. Поэтому K имеет коразмерность 1. Это позволяет нам записать $L = K + \mathbb{F}z$ с произвольным вектором $z \in L \setminus K$.

По предположению индукции пространство

$$W = \{v \in V \mid K(v) = 0\}$$

ненулевое. Так как K является идеалом, пространство W инвариантно относительно L: если $x \in L$, $y \in K$, $w \in W$, то

$$yx(w) = xy(w) - [x,y](w) = 0.$$

Выберем вектор $z \in L \setminus K$, как выше. Тогда нильпотентный эндоморфизм (действующий теперь на подпространстве W) имеет собственный вектор, то есть существует такой ненулевой вектор $v \in W$, что $z(v) = 0$. В итоге $L(v) = 0$, что и требовалось. $\square$

Докажем теперь теорему Энгеля:

По условию все элементы алгебры L являются ad-нильпотентными. Поэтому алгебра $\mathrm{ad}\, L \subset \mathfrak{gl}(L)$ удовлетворяет условию предыдущей теоремы. Следовательно, в алгебре L существует такой вектор $x \neq 0$, что $[L,x] = 0$, то есть $Z(L) \neq 0$. При этом алгебра $L/Z(L)$, очевидно, состоит из ad-нильпотентных элементов и имеет меньшую размерность, чем L. Индукция по размерности алгебры L показывает, что алгебра $L/Z(L)$ нильпотентна. Тогда ввиду утверждения (b) предложения 8 нилпотентна и алгебра L.

Имеется полезное следствие из теоремы 11, которое показывает "типичность" алгебры $\mathfrak{n}_n(\mathbb{F})$.

Сначала дадим одно определение.

Определение 17. Пусть V — конечномерное векторное пространство, $\dim V = n$. *Флаг* в пространстве V — это цепочка подпространств

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V, \quad \dim . V_i = i.$$

Пусть $x \in \mathrm{End}\, V$. Будем говорить, что x *оставляет инвариантным* этот флаг, если $x(V_i) \subset V_i$ при всех i.

Следствие 4. *Если предположения теоремы выполнены, то в пространстве V существует флаг (V_i), инвариантный относительно L, причем $L(V_i) \subset V_{i-1}$ для всех i. Другими словами, в пространстве V существует базис, в котором все матрицы из алгебры L принадлежат $\mathfrak{n}_n(\mathbb{F})$.*

Доказательство. Возьмем ненулевой вектор $v \in V$, аннулируемый алгеброй L (он существует по теореме 11). Положим $V_1 = \mathbb{F}v$. Заметим, что индуцированное действие алгебры L на пространстве $W = V/V_1$ также состоит из нильпотентных эндоморфизмов. Индукцией по $\dim V$ получаем, что в пространстве W существует флаг, инвариантный относительно L. Его прообраз в пространстве V есть искомый флаг. $\square$

Покажем еще одно применение теоремы 11, которое нам потребуется позже:

Лемма 11. *Пусть L — нильпотентная алгебра Ли, K — идеал в L. Тогда если $K \neq 0$, то $K \cap Z(L) \neq 0$.*

Доказательство. Посредством присоединенного представления алгебра L действует на K, а из теоремы 11 вытекает существование такого ненулевого вектора $x \in K$, что $[L, x] = 0$, то есть $x \in K \cap Z(L)$. $\square$

6.3 Теорема Ли

С этого момента мы будем считать, что поле $\mathbb{F}$ имеет нулевую характеристику и алгебраически замкнуто.

Теорема 12. *Пусть L — разрешимая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, где пространство V конечномерно. Если $V \neq 0$, то V содержит общий собственный вектор для всех эндоморфизмов из L.*

Доказательство. Применим индукцию по размерности L. Случай $L = 0$ тривиален. Мы попытаемся повторить немного доказательство теоремы 11. Напомним, что идея заключается в следующем: 1) найти идеал K коразмерности 1; (2) получить по предположению индукции, что для K существуют общие собственные векторы; (3) проверить, что L сохраняет пространство, состоящее из таких векторов; (4) найти в этом пространстве собственный вектор для одного элемента $z \in L$, удовлетворяющего равенству $L = K + \mathbb{F}z$.

Шаг (1) прост. Так как подалгебра L разрешима и ее размерность положительна, L строго включает $[L, L]$. В алгебре $L/[L, L]$ любое подпространство автоматически является идеалом в силу ее абелевости. Возьмем в ней подпространство коразмерности 1, тогда его прообраз K — идеал коразмерности 1 в L (содержащий $[L, L]$).

На шаге (2) по предположению существует общий собственный вектор $v \in V$ для K (разумеется, идеал K разрешим; если $K = 0$, то алгебра L — абелева размерности один и любой собственный вектор для базисного элемента из L позволяет завершить доказательство). Это означает, что для $x \in K$ будет выполняться равенство

$$x(v) = \lambda(x) \cdot v,$$

где $\lambda : K \to \mathbb{F}$ — некоторая линейная функция.

Зафиксируем λ и обозначим через W подпространство

$$\{w \in W \mid x(w) = \lambda(x) \cdot w \text{ для всех } x \in K\}.$$

Шаг (3) состоит в доказательстве инвариантности подпространства W при действии подалгебры L. Предположим на время, что это сделано, и перейдем к шагу (4): записав $L = K + \mathbb{F}z$ и используя алгебраическую замкнутость поля $\mathbb{F}$, найдем собственный вектор $v_0 \in W$ для z (отвечающей некоторому его собственному значению). Тогда v_0, очевидно, является собственным вектором для всей алгебры L (и λ можно продолжить до линейной функции на L с условием $x(v_0) = \lambda(x)v_0$, $x \in L$).

Осталось показать, что L сохраняет W. Пусть $w \in W$, $x \in L$. Чтобы проверить, лежит ли $x(w)$ в W, нужно взять произвольный элемент $y \in K$ и рассмотреть выражение

$$yx(w) = xy(w) - [x, y](w) = \lambda(y)x(w) - \lambda([x, y])w.$$

Таким образом, мы должны доказать, что $\lambda([x, y]) = 0$. Для этого зафиксируем $w \in W$, $x \in L$. Пусть $n > 0$ — наименьшее целое число, для которого

$$w, x(w), \dots, x^n(w)$$

линейно независимы. Далее, пусть W_i — подпространство в V, порожденное векторами $w, x(w), \dots, x^{i-1}(w)$ (мы полагаем $W_0 = 0$), видим, что x отображает W_n в W_n. Легко проверить, что любой элемент $y \in K$ оставляет каждое подпространство W_i инвариантным. Мы утверждаем, что в базисе $w, x(w), \dots, x^{n-1}(w)$ пространства W_n элемент $y \in K$ представляется верхнетреугольной матрицей с $\lambda(y)$ на диагонали.

Это немедленно следует из сравнения

$$yx^i(w) \equiv \lambda(y)x^i(w) \mod W_i,$$

которое мы докажем индукцией по i.

Случай $i = 0$ очевиден. Мы имеем

$$yx^i(w) = yxx^{i-1}(w) = xyx^{i-1}(w) - [x, y]x^{i-1}(w).$$

По предположению индукции

$$yx^{i-1}(w) = \lambda(y)x^{i-1}(w) + w' \quad (w' \in W_{i-1});$$

так как x отображает W_{i-1} в W_i (по построению), наше сравнение выполнено для всех i.

Согласно определению действия элемента $y \in K$ на пространстве W_n, мы имеем $\operatorname{tr}_{W_n}(y) = n\lambda(y)$. В частности, это верно для элементов из K вида $[x, y]$ (элемент x такой же, как выше, $y \in K$). Но как x, так и y сохраняют W_n, поэтому $[x, y]$ действует на W_n как коммутатор двух его эндоморфизмов; значит, его след равен нулю. Отсюда следует, что $n\lambda([x, y]) = 0$. Так как $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$, то $\lambda([x, y]) = 0$, что и требовалось. □

Следствие 5 (Теорема Ли). *Пусть L — разрешимая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, $\dim V = n < \infty$. Тогда L отображает в себя некоторый флаг в пространстве V (иными словами, в некотором его базисе матрицы элементов из L верхнетреугольны).*

Доказательство. Применим предыдущую теорему и индукцию по $\dim V$. $\square$

Более общо, пусть L — произвольная разрешимая алгебра Ли, $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ — ее конечномерное представление. Тогда алгебра $\varphi(L)$ разрешима и потому сохраняет некий флаг. Например, если φ — присоединенное представление, то флаг подпространств, инвариантных относительно L, — это цепочка идеалов в L, каждый из которых имеет коразмерность один в следующем. Тем самым доказано

Следствие 6. *Пусть алгебра L разрешима. Тогда существует такая цепь идеалов в L, $0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = L$, что $\dim L_i = i$.*

Следствие 7. *Пусть алгебра L разрешима. Тогда из того, что $x \in [L, L]$, следует, что отображение $\operatorname{ad}_L x$ нильпотентно. Как следствие, подалгебра $[L, L]$ нильпотентна.*

Доказательство. Выберем флаг идеалов, как в следствии 6. В базисе $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в L, в котором элементы $(x_1, \ldots, x_i)$ порождают L_i, матрицы из $\operatorname{ad} L$ принадлежат $\mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$. Значит, эндоморфизм $\operatorname{ad}_L x$ нильпотентен при $x \in [L, L]$; эндоморфизм $\operatorname{ad}_{[L,L]} x$ тем более нильпотентен, так что алгебра $[L, L]$ нильпотентна по теореме Энгеля. $\square$

6.4 Разложение Жордана–Шевалле

В этом пункте характеристика поля может быть произвольной.

Назовем элемент $x \in \operatorname{End} V$ (V конечномерно) *полупростым*, если все корни его минимального многочлена над $\mathbb{F}$ различны. В случае алгебраически замкнутого поля это равносильно диагонализируемости оператора. Два коммутирующих диагонализируемых эндоморфизма можно привести к диагональному виду одновременно, поэтому сумма и разность двух полупростых эндоморфизмов снова полупроста. Кроме того, если элемент x полупрост и отображает подпространство $W \subset V$ в себя, то очевидно, что ограничение отображения x на W полупросто.

Предложение 9. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{F}$, $x \in \operatorname{End} V$.*

(a) *Существуют единственные элементы $x_s, x_n \in \operatorname{End} V$, где x_s полупрост, x_n нильпотентен, x_s и x_n коммутируют, $x = x_s + x_n$.*

(b) *Существуют такие многочлены $p(t)$, $q(t)$ от одного переменного без свободного члена, что $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. Как следствие, x_s и x_n коммутируют с любым элементом, коммутирующим с x.*

(c) *Если $A \subset B \subset V$ —- некоторые подпространства и x отображает B в A, то x_s и x_n также отображают B в A.*

Разложение $x = x_s + x_n$ называется разложением Жордана–Шевалле эндоморфизма x; x_s и x_n называются, соответственно, полупростой и нильпотентной частями эндоморфизма x.

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ (с кратностями $m_1, \ldots, m_k$) — различные собственные значения отображения x, так что характеристический многочлен равен $\prod (t - a_i)^{m_i}$. Если

$$V_i = \ker(x - a_i \cdot 1)^{m_i},$$

то V является суммой подпространств $V_1, \ldots, V_k$, каждое из которых инвариантно относительно x. Ясно, что характеристический многочлен для x на V_i равен $(t-a_i)^{m_i}$. применив китайскую теорему об остатках (для кольца $\mathbb{F}[t]$), найдем многочлен $p(t)$, удовлетворяющий следующим сравнениям по попарно взаимно простым модулям:

$$p(t) \equiv a_i \mod (t-a_i)^{m_i}, \quad p(t) \equiv 0 \mod t$$

(заметим, что последнее сравнение лишнее, если 0 является собственным значением для x; в противном случае многочлен t взаимно прост с остальными).

Положим $q(t) := t - p(t)$. Очевидно, что у многочленов $q(t)$ и $p(t)$ нулевой свободный член, так как $p(t) \equiv 0 \mod t$.

Положим $x_s := p(x)$, $x_n := q(x)$. Поскольку эти эндоморфизмы являются многочленами от x, они коммутируют друг с другом, равно как и со всеми эндоморфизмами, коммутирующими с x. Они также оставляют инвариантными все подпространства в V, которые инварианты относительно x, в частности, все V_i. Сравнение $p(t) \equiv a_i \mod (t-a_i)^{m_i}$ показывает, что ограничение отображения $x_s - a_i \cdot 1$ на V_i равно нулю при всех i. Следовательно, x_s действует диагонально на V_i с единственным собственным значением a_i. По определению $x_n = x - x_s$, откуда ясно, что элемент x_n нильпотентен. Так как многочлены $p(t)$ и $q(t)$ не имеют свободного члена, утверждение (c) очевидно.

Осталось только доказать утверждение о единственности в пункте (a).

Пусть $x = s+n$ — другое такое разложение, так что $x_s - s = n - x_n$. Из утверждения (b) следует, что все эндоморфизмы в этом равенстве коммутируют. Суммы коммутирующих полупростых (соответственно, нильпотентных) операторов также полупросты (нипльпотенты), то есть получается, что нильпотентный оператор равен полупростому, откуда он равен нулю, что и требовалось. □

Чтобы показать полезность разложения Жордана, рассмотрим один частный случай.

Возьмем присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, где пространство V конечномерно. Если элемент $x \in \mathfrak{gl}(V)$ нильпотентен, то тем же свойством обладает и $\operatorname{ad} x$. Аналогично, если элемент x полупрост, то полупрост и элемент $\operatorname{ad} x$. Мы проверим это так: выберем базис $(v_1, \ldots, v_n)$ в V, в котором матрица x имеет вид $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Пусть $\{E_{ij}\}$ — стандартный базис в $\mathfrak{gl}(V)$, который соответствует $(v_1, \ldots, v_n)$:

$$E_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i.$$

Тогда простое вычисление показывает, что

$$\operatorname{ad} x(E_{ij}) = (a_i - a_j) E_{ij}.$$

Таким образом, матрица $\operatorname{ad} x$ диагональна в выбранном базисе для $\mathfrak{gl}(V)$.

Лемма 12. *Пусть $x \in \operatorname{End} V$ $(\dim V < \infty)$, $x = x_s + x_n$ — разложение Жордана. Тогда $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$ — разложение Жордана–Шевалле для $\operatorname{ad} x$.*

Доказательство. Мы видели, что эндоморфизм $\operatorname{ad} x_s$ полупрост, а эндоморфизм $\operatorname{ad} x_n$ нильпотентен; они коммутируют, так как

$$[\operatorname{ad} x_s, \operatorname{ad} x_n] = \operatorname{ad} [x_s, x_n] = 0.$$

Теперь применим часть (a) предыдущего предложения. □

6.5 Задачи

1. Пусть $\operatorname{char}\mathbb{F} = 2$. Докажите, что алгебра $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ нильпотентна.

2. Докажите, что сумма двух нильпотентных идеалов алгебры Ли также является нильпотентным идеалом.

3. Это упражнение показывает, что теорема Ли может быть неверна в случае ненулевой характеристики. Рассмотрим $p \times p$-матрицы

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \quad \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} & 1 \\ 1 & \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \operatorname{diag}[0, 1, 2, 3, \ldots, p-1].$$

Проверьте, что $[x, y] = x$, то есть x и y порождают двумерную разрешимую подалгебру L в $\mathfrak{gl}_p(\mathbb{F})$. Проверьте, что у x, y нет общего собственного вектора.

4. Пусть эндоморфизмы $x, y \in \operatorname{End} V$ коммутируют. Докажите, что $(x+y)_s = x_s + y_s$ и $(x+y)_n = x_n + y_n$. Покажите на примере, что это может быть неверное, если x и y не коммутируют.

7 Критерий Картана, форма Киллинга, модули

7.1 Критерий Картана

Теперь мы готовы к тому, чтобы получить мощный критерий разрешимости алегебр Ли L в терминах следов некоторых ее эндоморфизмов. Очевидно, что L будет разрешима, если $[L,L]$ нильпотентна. В свою очередь, теорема Энгеля утверждает, что алгебра $[L,L]$ нильпотентна, если (и только если) все операторы $\operatorname{ad}_{[L,L]}x$, $x \in [L,L]$, нильпотентны. Поэтому сначала мы выведем критерий нильпотентности эндоморфизмов в терминах следов.

Лемма 13. *Пусть $A \subset B$ — два подпространства в $\mathfrak{gl}(V)$, $\dim V < \infty$. Положим*

$$M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x,B] \subset A\}.$$

Предположим, что для некоторого $x \in M$ выполнено свойство $\operatorname{tr}(xy) = 0$ при всех $y \in M$. Тогда элемент x нильпотентен.

Доказательство. Пусть $x = s + n$ ($s = x_s$, $n = x_n$) — разложение Жордана для x. Выберем базис $v_1, \dots, v_m$ в V, в котором s имеет матрицу $\operatorname{diag}[a_1, \dots, a_m]$. Пусть E — векторное подпространство $\mathbb{F}$ (над простым подполем $\mathbb{Q}$), порожденное собственными значениями $a_1, \dots, a_m$. Нам надо показать, что $s = 0$, что равносильно равенству $E = 0$. Поскольку пространство E конечномерно над $\mathbb{Q}$ (по построению), достаточно показать, что двойственное пространство E^* — нулевое, то есть что любая линейная функция $f : E \to \mathbb{Q}$ — нулевая.

Для данной функции f пусть y — тот элемент в $\mathfrak{gl}(V)$, матрица которого в выбранном базисе равна $\operatorname{diag}[f(a_1), \dots, f(a_m)]$. Если $\{E_{ij}\}$ — соответствующий базис в $\mathfrak{gl}(V)$, то, как мы видели в прошлой лекции,

$$\operatorname{ad} s(E_{ij}) = (a_i - a_j)E_{ij}, \qquad \operatorname{ad} y(E_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))E_{ij}.$$

Теперь пусть $r(t) \in \mathbb{F}[t]$ — многочлен без свободного члена, удовлетворяющий условиям

$$r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j) \text{ для всех пар } i, j.$$

Существование такого многочлена следует из интеполяционной теоремы Лагранжа: неоднозначности в заданных значениях нет, поскольку из $a_i - a_j = a_k - a_l$ следует $f(a_i) - f(a_j) = f(a_k) - f(a_l)$.

Ясно, что $\operatorname{ad} y = r(\operatorname{ad} s)$.

Согласно лемме 12 прошлой лекции элемент $\operatorname{ad} s$ — полупростая часть элемента $\operatorname{ad} x$, и ее можно представить как многочлен от $\operatorname{ad} x$ без свободного члена. Поэтому $\operatorname{ad} y$ тоже является многочленом от $\operatorname{ad} x$ без свободного члена. По предположению $\operatorname{ad} x$ отображает B в A, откуда следует, что $\operatorname{ad} y(B) \subset A$, то есть $y \in M$. Используя предположение $\operatorname{tr}(xy) = 0$, получаем $\sum a_i f(a_i) = 0$. Левая часть равенства — это $\mathbb{Q}$-линейная комбинация элементов из E; применяя f, получаем $\sum f(a_i)^2 = 0$. Так как $f(a_i)$ — рациональные числа, то они все равны нулю. Поскольку a_i порождают E, функция f должна быть тождественным нулем. $\square$

Перед тем как сформулировать наш критерий разрешимости, приведем одно полезное тождество: если x, y, z — эндоморфизмы конечномерного векторного пространства, то

$$\mathrm{tr}\,([x,y]z) = \mathrm{tr}\,(x[y,z]).$$

Чтобы его проверить, достаточно воспользоваться равенствами

$$[x,y]z = xyz - yxz, \quad x[y,z] = xyz - xzy$$

и свойством следа

$$\mathrm{tr}\,(y(xz)) = \mathrm{tr}\,((xz)y).$$

Теорема 13 (Критерий Картана)**.** *Пусть L — подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, где пространство V конечномерно. Предположим, что*

$$\mathrm{tr}\,(xy) = 0 \text{ при всех } x \in [L,L],\ y \in L.$$

Тогда L разрешима.

Доказательство. Как отмечалось выше, достаточно доказать, что алгебра $[L,L]$ нильпотентна, или, равносильно, что все $x \in [L,L]$ — нильпотентные эндоморфизмы (теорема Энгеля). Для этого применим предыдущую лемму к нашему случаю: пространство V — из условия теоремы, $A = [L,L]$, $B = L$, тогда

$$M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x,L] \subset [L,L]\}.$$

Ясно, что $L \subset M$. По нашему предположению

$$\mathrm{tr}\,(xy) = 0 \text{ при } x \in [L,L],\ y \in L.$$

но чтобы вывести из леммы нильпотентность любого элемента $x \in [L,L]$, нам требуется более сильное утверждение:

$$\mathrm{tr}\,(xy) = 0 \text{ при } x \in [L,L],\ y \in M.$$

Если теперь $[x,y]$ — один из образующих в $[L,L]$, а $z \in M$, то приведенное перед теоремой тождество показывает, что

$$\mathrm{tr}\,([x,y]z) = \mathrm{tr}\,(x[y,z]) = \mathrm{tr}\,([y,z]x).$$

По определению множества M мы имеем $[y,z] \in [L,L]$, и правая часть равна нулю по предположению. □

Следствие 8. *Пусть L — такая алгебра Ли, что*

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y) = 0 \text{ для всех } x \in [L,L],\ y \in L.$$

Тогда алгебра L разрешима.

Доказательство. Применяя теорему к присоединенному представлению алгебры L, получаем, что алгебра $\mathrm{ad}\,L$ разрешима. Поскольку $\ker\,\mathrm{ad} = Z(L)$ разрешима, то и L разрешима. □

7.2 Форма Киллинга

Пусть L — произвольная алгебра Ли. Если $x, y \in L$, то положим

$$\varkappa(x, y) := \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y).$$

Тогда $\varkappa$ — симметрическая билинейная форма на L, которая называется *формой Киллинга.*

Форма $\varkappa$ также ассоциативна в том смысле, что

$$\varkappa([x, y], z) = \varkappa(x, [y, z]),$$

что следует из тождества $\operatorname{tr}([x, y]z) = \operatorname{tr}(x[y, z])$ для эндоморфизмов x, y, z конечномерного векторного пространства.

Следующая лемма пригодится нам позже.

Лемма 14. *Пусть I — идеал в L. Если $\varkappa$ — форма Киллинга на L, а $\varkappa_I$ — форма Киллинга на идеале I (рассматриваемом как алгебра Ли), то $\varkappa_I = \varkappa|_{I \times I}$.*

Доказательство. Заметим, что если W — подпространство конечномерного векторного пространства V, а φ — эндоморфизм, отображающий V в W, то $\operatorname{tr}\varphi = \operatorname{tr}(\varphi|_W)$. Чтобы убедиться в этом, дополним базис пространства W до базиса V и посмотрим на получившуюся матрицу φ.

Если теперь $x, y \in I$, то $(\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)$ — эндоморфизм пространства L отображающий L в I, поэтому его след $\varkappa(x, y)$ совпадает со следом $\varkappa_I(x, y)$ эндоморфизма

$$(\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)|_I = (\operatorname{ad}_I x)(\operatorname{ad}_I y).$$

□

В общем случае симметрическая билинейная форма $\beta(x, y)$ называется *невырожденной*, если ее радикал S равен нулю, где

$$S = \{x \in L \mid \beta(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in L\}.$$

Из ассоциативности формы Киллинга следует, что ее радикал — не просто подпространство: S является идеалом алгебры L.

Как известно из линейной алгебры, невырожденность формы можно проверить следующим образом: выберем базис $x_1, \ldots, x_n$ в L. Тогда форма $\varkappa$ невырожденна, если и только и если $n \times n$-матрица с элементом $\varkappa(x_i, x_j)$ в позиции (i, j) имеет ненулевой определитель.

В качестве примера вычислим форму Киллинга алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, используя стандартный базис

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие матрицы присоединенного представления выглядят в нем так:

$$\operatorname{ad} h = \operatorname{diag}[2, 0, -2], \qquad \operatorname{ad} x = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{ad} y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица формы $\varkappa$ равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, при $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$ форма $\varkappa$ невырожденна.

Напомним, что (ненулевая) алгебра Ли называется *полупростой*, если ее радикал равен нулю. Это равносильно требованию, что у L нет ненулевых абелевых идеалов. Действительно, любой такой идеал должен лежать в радикале; и обратно, радикал (если он ненулевой) содержит такой идеал, а именно, последний ненулевой член производного ряда для $\operatorname{Rad} L$.

Теорема 14. *Пусть L — ненулевая алгебра Ли. Тогда L полупроста если и только если ее форма Киллинга невырожденна.*

Доказательство. Предположим вначале, что $\operatorname{Rad} L = 0$. Пусть S — радикал формы $\varkappa$. По определению

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0 \text{ при всех } x \in S,\ y \in L \text{ (в частности, при } y \in [S, S]).$$

По критерию Картана подалгебра $\operatorname{ad}_L S$ разрешима, поэтому и алгебра S разрешима. Но мы заметили выше, что S — идеал в L, поэтому $S \subset \operatorname{Rad} L = 0$ и форма $\varkappa$ невырожденна.

Обратно, пусть $S = 0$. Чтобы доказать полупростоту алгебры L, достаточно установить, что любой абелев идеал I в L содержится в S. Предположим, что $x \in I$, $y \in L$. Тогда композиция $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$ задает отображение $L \to L \to I$ и $(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)^2$ отображает L в $[I, I] = 0$. Это означает, что эндоморфизм $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$ нильпотентен, откуда следует, что

$$0 = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = \varkappa(x, y), \text{ т. е. } I \subset S = 0.$$

□

7.3 Простые идеалы алгебры Ли

Сначала дадим определение. Алгебра Ли называется *прямой суммой* идеалов $I_1, \ldots, I_t$, если $L = I_1 + \cdots + I_t$ — прямая сумма подпространств. Из этого условия вытекает, что

$$[I_i, I_j] \subset I_i \cap I_j = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Мы будем писать

$$L = I_1 \oplus \cdots \oplus I_t.$$

Теорема 15. *Пусть алгебра L полупроста. Тогда в ней существуют такие простые идеалы $L_1, \ldots, L_t$, что $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_t$. Любой простой идеал алгебры L совпадает с одним из L_i. При этом форма Киллинга на L_i является ограничением формы $\varkappa$ на $L_i \times L_i$.*

Доказательство. Вначале пусть I — произвольный идеал в L. Тогда множество

$$I^{\perp} := \{x \in L \mid \varkappa(x,y) = 0 \text{ для всех } i \in I\}$$

также является идеалом ввиду ассоциативности формы $\varkappa$. Критерий Картана, примененный к алгебре Ли I, показывает, что идеал $I \cap I^{\perp}$ алгебры L разрешим (следовательно , он нулевой). Так как $\dim I + \dim I^{\perp} = \dim L$, мы получаем $L = I \oplus I^{\perp}$.

Теперь проведем индукцию по размерности $\dim L$, чтобы получить искомое разложение алгебры L в прямую сумму простых идеалов. Если у L нет ненулевых собственных идеалов, то L уже проста и доказательство закончено. В противном случае пусть L_1 — минимальный ненулевой идеал; согласно предыдущему абзацу $L = L_1 \oplus L_1^{\perp}$. Как следствие, любой идеал в L_1 является идеалом и в L, поэтому алгебра L_1 полупроста (а тогда и проста ввиду минимальности). По той же причине алгебра $L_1^{\perp}$ полупроста; по предположению индукции она распадается с прямую сумму простых идеалов, являющихся идеалами и в L. Отсюда получаем разложение для L.

Теперь мы должны показать, что это разложение единственно. Если I — любой простой идеал в L,то $[I,L]$ — идеал в I, ненулевой ввиду условия $Z(L) = 0$; отсюда вытекает, что $[I,L] = I$. С другой стороны,

$$[I,L] = [I,L_1] \oplus \cdots \oplus [I,L_t],$$

поэтому все слагаемые, кроме одного, должны равняться нулю. Пусть $[I,L_i] = I$. Тогда $I \subset L_i$ и $I = L_i$ (поскольку подалгебра L_i проста).

Последнее утверждение следует из леммы 15. $\square$

Следствие 9. *Если L алгебра полупроста, то $L = [L,L]$, и все идеалы и гомоморфные образы алгебры L полупросты (или равны нулю). При этом каждый идеал в алгебре L является суммой некоторых ее простых идеалов.*

7.4 Внутренние дифференцирования

Невырожденность формы Киллинга имеет еще одно важное следствие. Перед тем как его сформулировать, напомним, что $\operatorname{ad} L$ является идеалом в $\operatorname{Der} L$ (для любой алгебры Ли L).

Доказательство основано на простом наблюдении:

$$[\delta, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(\delta x), \qquad x \in L, \quad \delta \in \operatorname{Der} L.$$

Теорема 16. *Если алгебра L полупроста, то $\operatorname{ad} L = \operatorname{Der} L$, то есть любое дифференцирование в ней является внутренним.*

Доказательство. Поскольку L полупроста, $Z(L) = 0$. Поэтому $L \to \operatorname{ad} L$ — изоморфизм алгебр Ли. В частности, $M = \operatorname{ad} L$ обладает невырожденной формой Киллинга. Если $D = \operatorname{Der} L$, то, как мы только что отметили, $[D,M] \subset M$. Отсюда следует, что $\varkappa_M$ является ограничением формы Киллинга $\varkappa_D$ алгебры D на $M \times M$. В частности, если $I = M^{\perp}$ — подпространство в D, ортогональное к M относительно формы $\varkappa_D$, то из невырожденности формы $\varkappa_M$, следует, что $I \cap M = 0$. Как I, так и M являются идеалами в D, а значит, $[I, M] = 0$. Если теперь $\delta \in I$, то с учетом $[\delta, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(\delta x)$ мы получаем $\operatorname{ad}(\delta x) = 0$ для всех $x \in L$, что в свою очередь влечет равенство $\delta x = 0$, $x \in L$, так как отображение ad взаимно однозначно. Следовательно, $\delta = 0$. Отсюда заключаем, что $I = 0$, $\operatorname{Der} L = M = \operatorname{ad} L$. □

7.5 Абстрактное разложение Жордана

Лемма 15. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная $\mathbb{F}$-алгебра. Тогда* $\operatorname{Der}\mathfrak{A}$ *содержит полупростые и нильпотентные части (в* $\operatorname{End}\mathfrak{A}$*) всех своих элементов.*

Доказательство. Пусть $\sigma, \nu \in \mathfrak{A}$ — полупростая и нильпотентная части элемента $\delta \in \operatorname{Der}\mathfrak{A}$, соответственно. Достаточно показать, что $\sigma \in \operatorname{Der}\mathfrak{A}$. Если $a \in \mathbb{F}$, то положим

$$\mathfrak{A}_a = \{x \in \mathfrak{A} \mid (\delta - a \cdot 1)^k x = 0 \text{ для некоторого } k\}.$$

Тогда $\mathfrak{A}$ — прямая сумма подалгебр $\mathfrak{A}_a$, отвечающих собственным значениям эндоморфизма δ (и σ), причем σ действует на $\mathfrak{A}_a$ как скалярное умножение на a. Для любых $a, b \in \mathbb{F}$ можно проверить, что

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subset \mathfrak{A}_{a+b},$$

с помощью общей формулы

$$(\delta - (a+b)\cdot 1)^n(xy) = \sum_{i=1}^{n} C_n^i((\delta - a\cdot 1)^{n-i}x)((\delta - b \cdot 1)^i y) \text{ для } x, y \in \mathfrak{A}.$$

Эта формула легко проверяется индукцией по n.

Если теперь $x \in \mathfrak{A}_a$, $y \in \mathfrak{A}_b$, то $\sigma(xy) = (a+b)xy$, так как $xy \in \mathfrak{A}_{a+b}$ (возможно, равняясь нулю). С другой стороны,

$$(\sigma x)y + x(\sigma y) = (a+b)xy.$$

Поскольку сумма $\mathfrak{A} = \oplus\mathfrak{A}_a$ как векторных пространств прямая, то σ является дифференцированием, что и требовалось. □

С помощью этой леммы и теоремы 16 можно ввести абстрактное разложение Жордана в произвольной полупростой алгебре Ли L.

Так как $\operatorname{Der} L$ совпадает с $\operatorname{ad} L$, а отображение $L \to \operatorname{ad} L$ взаимно однозначно, по каждому элементу $x \in L$ однозначно восстанавливаются такие элементы $s, n \in L$, что $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} s + \operatorname{ad} n$, где $[s, n] = 0$, элемент является ad-полупростым (то есть $\operatorname{ad} s$ полупрост), а элемент n является ad-нильпотентным. Назовем s и n *полупростой* и *нильпотентной* частями элемента x.

7.6 Модули

Пусть L — некоторая алгебра Ли. Часто бывает удобно использовать язык модулей наряду с привычным уже языком представлений.

Векторное пространство V с дополнительной операцией $L \times V \to V$ (обозначаемой $(x, v) \mapsto x \cdot v$ или просто xv), называется *L-модулем*, если выполнены следующие условия:

(M1) $(ax + by) \cdot v = a(x \cdot v) + b(y \cdot v)$,

(M2) $x \cdot (av + bw) = a(x \cdot v) + b(x \cdot w)$,

(M3) $[x, y] \cdot v = x \cdot y \cdot v - y \cdot x \cdot v$ $(x, y \in L;\ v, w \in V;\ a, b \in \mathbb{F})$.

Например, если $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление алгебры L, то V можно рассматривать как L-модуль с операцией $x \cdot v = \varphi(x)(v)$. Обратно, для данного L-модуля V это уравнение определяет представление $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$.

Гомоморфизм L-модулей — это такое линейное отображение $\varphi : V \to W$, что $\varphi(x \cdot v) = x \cdot \varphi(v)$. Ядро такого гомоморфизма будет L-подмодулем в V (и все стандартные теоремы о гомоморфизмах легко устанавливаются). Если φ является изоморфизмом векторных пространств, мы называем его изоморфизмом L-модулей. В этом случае говорят, что два модуля соответствуют эквивалентным представлениям алгебры Ли. *Неприводимым* называется такой L-модуль V, у которого имеется ровно два L-подмодуля (он сам и нулевой); как следствие, мы не рассматриваем нульмерное векторное пространство как неприводимый L-модуль. Модуль V называется *вполне приводимым*, если он является прямой суммой неприводимых L-подмодулей, или, что равносильно, если каждый L-подмодуль W в V имеет дополнение W' (такой L-подмодуль, для которого $V = W \oplus W'$).

Понятно, что прямую сумму произвольных L-модулей W, W' можно очевидным образом превратить в L-модуль, положив

$$x \cdot (w, w') = (x \cdot w, x \cdot w').$$

Пусть дано представление $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$. Ассоциативная алгебра (с единицей), которую $\varphi(L)$ порождает в $\operatorname{End} V$, оставляет инвариантными те же подпространства, что и L. Поэтому все обычные утверждения о модулях над ассоциативными кольцами выполняются и для L.

Для дальнейшего напомним хорошо известную лемму Шура:

Лемма 16 (Шур)**.** *Пусть представление $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ неприводимо. Тогда среди эндоморфизмов пространства V только скаляры коммутируют со всеми отображениями $\varphi(x)$, $x \in L$.*

Сама алгебра L всегда является L-модулем (он соответствует присоединенному представлению). Его L-подмодули — это в точности идеалы; поэтому если алгебра L проста, то она неприводима как L-модуль, а если полупроста, то вполне приводима.

Приведем ряд стандартных способов изготовления одних L-модулей из других (это пригодится нам позже).

Пусть V — некоторый L-модуль. Тогда двойственное векторное пространство V^* можно превратить в L-модуль (называемый *двойственным* или *сопряженным*), если при $f \in V^*$, $v \in V$, $x \in L$ положить

$$(x \cdot f)(v) = -f(x \cdot v).$$

Аксиомы (M1) и (M2) почти очевидны, так что проверим только (M3):

$$\begin{aligned}([x,y]\cdot f)(v) &= -f([x,y]\cdot v) = -f(x\cdot y\cdot v - y\cdot x\cdot v) = \\ &= -f(x\cdot y\cdot v) + f(y\cdot x\cdot v) = \\ &= (x\cdot f)(y\cdot v) - (y\cdot f)(x\cdot v) = -y\cdot x\cdot f)(v) + (x\cdot y\cdot f)(v) = \\ &= ((x\cdot y - y\cdot x)\cdot f)(v).\end{aligned}$$

Если V, W — два L-модуля, то пусть $V\otimes W$ — тензорное произведение над $\mathbb{F}$ соответствующих векторных пространств. Напомним, что если пространства V и W имеют базисы $(v_1,\dots,v_m)$ и $(w_1,\dots,w_n)$, то пространстве $V\otimes W$ имеется базис, состоящий из mn векторов $v_i\otimes w_j$. Определим действие:

$$x\cdot(v\otimes w) := x\cdot v\otimes w + v\otimes x\cdot w, \qquad x\in L,\ v\in V,\ w\in W.$$

Как и выше, решающее значение имеет проверка аксиомы (M3):

$$\begin{aligned}[x,y]\cdot(v\otimes w) &= [x,y]\cdot v\otimes w + v\otimes [x,y]\cdot w = \\ &= (x\cdot y\cdot v - y\cdot x\cdot v)\otimes w + v\otimes (x\cdot y\cdot w - y\cdot x\cdot w) = \\ &= (x\cdot y\cdot v\otimes w + v\otimes x\cdot y\cdot w) - (y\cdot x\cdot v\otimes w + v\otimes y\cdot x\cdot w).\end{aligned}$$

К тому же результату приводит разложение $(x\cdot y - y\cdot x)\cdot(v\otimes w)$.

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{F}$. Существует стандартный изоморфизм векторных пространств $V^*\otimes V \to \operatorname{End} V$, при котором образующему вида $f\otimes v$, $f\in V^*$, $v\in V$, соответствует эндоморфизм, отображающий $w\in V$ в $f(w)v$. Стандартное рассуждение (с использованием двойственных базисов) показывает, что мы определили эпиморфизм $V^*\otimes V \to \operatorname{End} V$, а так как оба пространства имеют размерность n^2, он обязан быть изоморфизмом.

Если теперь V (а тогда и V^*) является L-модулем, то способ, изложенный выше, превращает и $V^*\otimes V$ в L-модуль. В силу описанного выше изоморфизма пространство $EndV$ также можно рассматривать как L-модуль. Соответствующее действие алгебры L на $\operatorname{End} V$ можно и описать и непосредственно:

$$(x\cdot f)(v) = x\cdot f(v) - f(x\cdot v), \qquad x\in L,\ f\in \operatorname{End} V,\ v\in V.$$

7.7 Задачи

1. Докажите теорему, обратную к критерию Картана.

2. Докажите, что если алгебра Ли L нильпотентна, то ее форма Киллинга тождественно равна нулю.

3. Докажите, что алгебра Ли L разрешима тогда и только тогда, когда $[L,L]$ лежит в радикале формы Киллинга.

4. Пусть L — двумерная неабелева разрешимая алгебра Ли. Докажите, что ее форма Киллинга не является тождественным нулем.

5. Пусть $L = L_1\oplus\cdots\oplus L_t$ — разложение полупростой алгебры Ли L в сумму ее простых идеалов. Покажите, что полупростая и нильпотентная части элемента $x\in L$ — это сумма полупростых и нильпотентных частей его компонент в идеалах L_i.

8 Представления полупростых алгебр Ли

8.1 Элемент Казимира представления

На прошлой лекции с помощью критерия разрешимости Картана (в терминах следа) мы доказали, что полупростая алгебра Ли имеет невырожденную форму Киллинга. Более общо, пусть алгебра L полупроста, а $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ — ее точное представление.

Определим на алгебре L симметрическую билинейную форму

$$\beta(x, y) = \operatorname{tr}(\varphi(x)\varphi(y)).$$

Форма β ассоциативна, и, как следствие, ее радикал S является идеалом в L. Кроме того, форма β невырожденна: действительно, алгебра $\varphi(S) \cong S$ разрешима, и поэтому $S = 0$.

Пусть теперь алгебра L полупроста, а β — любая невырожденная симметрическая билинейная форма на L. Если $(x_1, \ldots, x_n)$ — базис в L, то существует однозначно определённый двойственный базис $(y_1, \ldots, y_n)$ относительно формы β, удовлетворяющий условию $\beta(x_i, y_j) = \delta_{ij}$. Если $x \in L$, то можно записать

$$[x, x_i] = \sum_j a_{ij} x_j \text{ и } [x, y_i] = \sum_j b_{ij} y_j.$$

С учетом ассоциативности формы β получаем

$$a_{ik} = \sum_j a_{ij}\beta(x_j, y_k) = \beta([x, x_i], y_k) =$$
$$= \beta(-[x_i, x], y_k) = \beta(x_i, -[x, y_k]) = \sum_j b_{kj}\beta(x_i, y_j) = -b_{ki}.$$

Пусть $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ — некоторое представление алгебры L. Положим

$$c_\varphi(\beta) := \sum_i \varphi(x_i)\varphi(y_i) \in \operatorname{End} V$$

(как и выше, x_i, y_i пробегают двойственные базисы относительно формы β).

Используя тождество

$$[x, yz] = [x, y]z + y[x, z] \quad (\text{в } \operatorname{End} V)$$

и тот факт, что $a_{ik} = -b_{ki}$, получаем

$$[\varphi(x), c_\varphi(\beta)] = \sum_i [\varphi(x), \varphi(x_i)]\varphi(y_i) + \sum_i \varphi(x_i)[\varphi(x), \varphi(y_i)] =$$
$$= \sum_{i,j} a_{ij}\varphi(x_j)\varphi(y_i) + \sum_{i,j} b_{ij}\varphi(x_i)\varphi(y_j) = 0.$$

Другими словами, $c_{\varphi(\beta)}$ является эндоморфизмом пространства V, коммутирующим с $\varphi(L)$.

Подытожим предыдущие замечания.

Пусть $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ — точное представление с (невырожденной!) формой следа $\beta(x,y) = \operatorname{tr}(\varphi(x)\varphi(y))$.

В этом случае, зафиксировав в алгебре L базис $(x_1, \ldots, x_n)$, обозначим $c_\varphi(\beta)$ просто через c_φ и назовем его *элементом Казимира* для φ.

Его след равен

$$\sum_i \operatorname{tr}(\varphi(x_i)\varphi(y_i)) = \sum_i \beta(x_i, y_i) = \dim L \neq 0.$$

Если при этом представление φ неприводимо, то в силу леммы Шура элемент c_φ является скаляром, равным $\dim L / \dim V$; мы видим, что в этом случае c_φ не зависит от выбранного нами базиса пространства L.

Пример 6. Пусть $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, $V = \mathbb{F}^2$, φ — тождественное отображение $L \to \mathfrak{gl}(V)$. Пусть, далее, (x, h, y) — стандартный базис в L. Легко видеть, что двойственный базис относительно формы следа имеет вид $(y, h/2, x)$, так что

$$c_\varphi = xy + 1/2h^2 + yx = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

8.2 Теорема Вейля

Лемма 17. *Пусть $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление полупростой алгебры Ли L. Тогда $\varphi(L) \subset \mathfrak{sl}(V)$. В частности, L действует тривиально на любом одномерном L-модуле.*

Доказательство. Используем равенство $L = [L, L]$ и тот факт, что $\mathfrak{sl}(V)$ — производная алгебра для $\mathfrak{gl}(V)$. □

Теорема 17 (Вейль). *Пусть $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ — конечномерное представление полупростой алгебры Ли, $V \neq 0$. Тогда представление φ вполне приводимо.*

Доказательство. Начнем с частного случая, когда в модуле V имеется L-подмодуль W коразмерности один. Поскольку согласно лемме алгебра L тривиально действует на V/W, можно обозначить этот модуль через $\mathbb{F}$, не опасаясь разницы. Получаем точную последовательность

$$0 \to W \to V \to \mathbb{F} \to 0.$$

Индукцией по $\dim W$ можно свести теорему к случаю неприводимого L-модуля W. А именно, пусть W' — собственный ненулевой подмодуль в W.

Тогда имеется точная последовательность

$$0 \to W/W' \to V/W' \to \mathbb{F} \to 0.$$

По предположению индукции эта последовательность расщепляется, то есть в V/W' существует одномерный L-подмодуль (пусть это будет $\widetilde{W}/W'$), дополнительный к W/W'.

Отсюда получаем другую точную последовательность

$$0 \to W' \to \widetilde{W} \to \mathbb{F} \to 0.$$

Ситуация аналогична исходной с тем отличием, что

$$\dim W' < \dim W.$$

По индукции получаем одномерный подмодуль X, дополнительный к W' в $\widetilde{W}$:

$$\widetilde{W} = W' \oplus X.$$

Но

$$V/W' = W/W' \oplus \widetilde{W}/W'.$$

Следовательно, $V = W \oplus X$, поскольку сумма размерностей слагаемых равна $\dim V$ и при этом $W \cap X = 0$.

Теперь мы можем считать модуль W неприводимым. Без потери общности можно также считать, что L действует на V точно.

Пусть $c = c_\varphi$ — элемент Казимира для φ. Поскольку c коммутирует с $\varphi(L)$, то c в действительности является эндоморфизмом L-модуля V; в частности, $c(W) \subset W$ и $\ker c$ является L-подмодулем в V.

Поскольку L действует на V/W тривиально (то есть $\varphi(L)$ отображает V в W), это верно и для c (как линейной комбинации произведений элементов из $\varphi(x)$). Поэтому c имеет нулевой след на V/W. С другой стороны, по лемме Шура c действует как скаляр на неприводимом L-подмодуле W; этот скаляр не равен нулю, иначе выполнялось бы равенство $\operatorname{tr}_V(c) = 0$, вопреки доказанному ранее.

Как следствие, $\ker c$ является одномерным L-подмодулем и V имеет тривиальное пересечение с W.

Мы получили искомое дополнение к W.

Теперь мы готовы взяться за общий случай.

Пусть W — произвольный ненулевой подмодуль в V:

$$0 \to W \to V \to V/W \to 0.$$

Далее, пусть $\operatorname{Hom}(V, W)$ — пространство линейных отображений $V \to W$, рассматриваемое как L-модуль. Обозначим через $\mathcal{V}$ подпространство в $\operatorname{Hom}(V, W)$, состоящее из тех отображений, которые действуют на W как скаляр. Оно является L-подмодулем: если $f|_W = a \cdot 1_W$, то при $x \in L$, $w \in W$ мы имеем

$$(x \cdot f)(w) = x \cdot f(w) - f(x \cdot w) = a(x \cdot w) - a(x \cdot w) = 0,$$

а значит, $x \cdot f|_W = 0$.

Пусть $\mathcal{W}$ — подпространство в $\mathcal{V}$, состоящее из тех f, которые аннулируют W. Из предыдущих выкладок следует, что $\mathcal{W}$ также является L-подмодулем, причем L отображает $\mathcal{V}$ в $\mathcal{W}$. При этом $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ имеет размерность один, поскольку $f \in \mathcal{V}$ определяется (по модулю $\mathcal{W}$) скаляром $f|_W$. Мы приходим к ситуации

$$0 \to \mathcal{W} \to \mathcal{V} \to \mathbb{F} \to 0,$$

уже разобранной выше.

В соответствии с первой частью доказательства, $\mathcal{V}$ имеет одномерный подмодуль, дополнительный к $\mathcal{W}$.

Пусть его порождает отображение $f : V \to W$. После умножения на ненулевой скаляр можно считать, что $f_W = 1_W$. Алгебра L аннулирует f, если и только если

$$0 = (x \cdot f)(v) = x \cdot f(v) - f(x \cdot v),$$

то есть f является L-гомоморфизмом. Тогда $\ker f$ — подмодуль в V. Так как f отображает V в W, а на W действует как 1_W, мы получаем, что $V = W \oplus \ker f$, что и требовалось. □

8.3 Сохранение разложения Жордана

Теорема Вейля играет решающую роль при изучении представлений полупростой алгебры Ли L. Здесь мы дадим ей более непосредственное применение, показав с ее помощью, что абстрактное разложение Жордана согласовано со всевозможными линейными представлениями алгебры L.

Теорема 18. *Пусть $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ — полупростая линейная алгебра Ли (пространство V конечномерно). Тогда L содержит полупростые и нильпотентные части всех своих элементов при разложении в $\mathfrak{gl}(V)$. Как следствие, абстрактное и обычное разложения Жордана в L совпадают.*

Доказательство. Второе утверждение вытекает из первого, поскольку разложение каждого типа единственно.

Возьмем произвольный элемент $x \in L$ с разложением Жордана $x = x_s + x_n$ в $\mathfrak{gl}(V)$. Нужно показать, что $x_s, x_n \in L$. Поскольку $\operatorname{ad} x(L) \subset L$, мы получаем, что $\operatorname{ad} x_s(L) \subset L$ и $\operatorname{ad} x_n(L) \subset L$, где $\operatorname{ad} = \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}$. Другими словами, $x_s, x_n \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(L) = N$. Это подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, в которой L является идеалом. Нам было бы достаточно показать, что $L = N$, но это, к сожалению, неверно: например, скаляры лежат в N, но не в L, поскольку $L \subset \mathfrak{sl}(V)$. Поэтому надо заключить x_s, x_n в некоторую подалгебру, меньшую чем N, затем показать, что она совпадает с L.

Если W — произвольный L-подмодуль в V, положим

$$L_W := \{y \in \mathfrak{gl}(V) \mid y(W) \subset W \text{ и } \operatorname{tr}(y|_W) = 0\}.$$

Например, $L_V = \mathfrak{sl}(V)$.

Поскольку $L = [L, L]$, алгебра L заведомо содержится во всех таких L_W. Пусть L' — пересечение алгебры N со всеми подпространствами L_W. Очевидно, L' — подалгебра в N, содержащая L как идеал (но не содержащая скаляров). Можно утверждать и большее: если $x \in L$, то элементы x_s, x_n также лежат в L_W, а потому и в L'.

Осталось доказать, что $L = L'$. Так как L' — конечномерный L-модуль, то в силу теоремы Вейля можно записать $L' = L + M$ для некоторого L-подмодуля M, где сумма прямая. Но $[L, L'] \subset L$ (поскольку $L' \subset N$), поэтому действие алгебры L на M тривиально.

Пусть W — произвольный неприводимый L-подмодуль в V. Если $y \in M$, то $[L, y] = 0$, и в силу леммы Шура y действует на W как скаляр. С другой стороны, $\operatorname{tr}(y|_W) = 0$, так как $y \in L_W$. Поэтому y отображает W в 0. По теореме Вейля V является прямой суммой неприводимых L-подмодулей, так что на самом деле $y = 0$. Это означает, что $M = 0$, $L = L'$. □

Следствие 10. *Пусть L — полупростая алгебра Ли, $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ — ее конечномерное представление. Если $x = s + n$ — абстрактное разложение Жордана элемента $x \in L$, то $\varphi(x) = \varphi(s) + \varphi(n)$ — обычное разложение Жордана элемента $\varphi(x)$.*

Доказательство.

Алгебра $\varphi(L)$ порождается собственными векторами отображения $\operatorname{ad}_{\varphi(L)}\varphi(s)$, поскольку это верно для L по отношению к $\operatorname{ad} s$; следовательно, элемент $\operatorname{ad}_{\varphi(L)}\varphi(s)$ полупрост. Аналогично, элемент $\operatorname{ad}_{\varphi(L)}\varphi(n)$ нильпотентен и коммутирует с $\operatorname{ad}_{\varphi(L)}\varphi(s)$. Соответственно, $\varphi(x) = \varphi(s) + \varphi(n)$ — абстрактное разложение Жордана элемента $\varphi(x)$ в полупростой алгебре Ли $\varphi(L)$. Применив предыдущую теорему, получаем искомый результат. □

8.4 Представления алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$

В этом пункте все модули предполагаются конечномерными над $\mathbb{F}$. Через L обозначается алгебра $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ со стандартным базисом

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $[h, x] = 2x$, $[h, y] = -2y$, $[x, y] = h$.

Пусть V — произвольный L-модуль. Поскольку элемент h полупрост, он действует на V диагонально (так как поле $\mathbb{F}$ предполагается замкнутым, то все соответствующие собственные значения принадлежат $\mathbb{F}$). Отсюда возникает разложение модуля V в прямую сумму собственных подпространств

$$V_\lambda = \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda v\}, \quad \lambda \in \mathbb{F}.$$

В случае, когда $V_\lambda \neq 0$, мы называем λ *весом* элемента h в пространстве V, в V_λ — *весовым подпространством.*

Лемма 18. *Если $v \in V_\lambda$, то $x \cdot v \in V_{\lambda+2}$ и $y \cdot v \in V_{\lambda-2}$.*

Доказательство. Мы имеем

$$h \cdot (x \cdot v) = [h, x] \cdot v + x \cdot h \cdot v = 2x \cdot v + \lambda x \cdot v = (\lambda + 2)x \cdot v,$$

и аналогично для y. □

Из леммы вытекает, что элементы x, y представляются нильпотентными эндоморфизмами модуля V.

Поскольку $\dim V < \infty$, а сумма

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{F}} V_\lambda$$

— прямая, должно существовать такое подпространство $V_\lambda \neq 0$, что $V_{\lambda+2} = 0$. Согласно лемме тогдв $x \cdot v = 0$ при всех $v \in V_\lambda$. Любой ненулевой вектор в V_λ с таким λ называется *старшим вектором* веса λ.

Предположим теперь, что V — неприводимый L-модуль. Выберем старший вектор, скажем $v_0 \in V_\lambda$; положим

$$v_{-1} = 0, \quad v_i = (1/i!)y^i \cdot v_0, \quad i \geqslant 0.$$

Лемма 19. *Справедливы равенства:*
(a) $h \cdot v_i = (\lambda - 2i)v_i$,
(b) $y \cdot v_i = (i+1)v_{i+1}$,
(c) $x \cdot v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$, $i \geqslant 0$.

Доказательство. Равенство (a) вытекает из повторного применения леммы 18, тогда как (b) верно по определению.

Чтобы доказать (c), применим индукцию по i. Случай $i = 0$ очевиден (так как мы положили $v_{-1} = 0$).

Заметим, что

$$\begin{aligned} ix \cdot v_i = x \cdot y \cdot v_{i-1} &= (\text{по определению}) = \\ &= [x,y] \cdot v_{i-1} + y \cdot x \cdot v_{i-1} = h \cdot v_{i-1} + y \cdot x \cdot v_{i-1} = \\ &= (\lambda - 2(i-1))v_{i-1} + (\lambda - i + 2)y \cdot v_{i-2} = \\ &= (\text{ввиду (a) и предположения индукции}) = \\ &= (\lambda - 2i + 2)v_{i-1} + (i-1)(\lambda - i + 2)v_{i-1} = (\text{ввиду (b)}) = \\ &= i(\lambda - i + 1)v_{i-1}. \end{aligned}$$

Теперь разделим обе части равенства на i. $\square$

В силу формулы (a) все ненулевые элементы v_i линейно независимы. Но $\dim V < \infty$. Пусть m — наименьшее целое число, для которого $v_m \neq 0$, $v_{m+1} = 0$. Ясно, что $v_{m+i} = 0$ при всех $i > 0$. Вместе формулы (a)–(c) показывают, что подпространство в V с базисом $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ является ненулевым L-подмодулем. Поскольку модуль V неприводим, это подпространство совпадает с V. При этом в упорядоченном базисе $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ можно в явном виде выписать матрицы эндоморфизмов, представляющих x, y, h; отметим, что h представляется диагональной матрицей, а x и y — соответственно верхней и нижней треугольными матрицами.

При внимательном взгляде на формулу (c) открывается неожиданный факт:
при $i = m + 1$ левая часть равна 0, а правая — $(\lambda - m)v_m$. Поскольку $v_m \neq 0$, то мы заключаем, что $\lambda = m$. Другими словами, *вес старшего вектора равен неотрицательному целому числу* (на единицу меньше, чем $\dim V$). Назовем его *старшим весом* для V. При этом в силу формулы (a) каждый вес μ имеет кратность 1 (то есть $\dim V_\mu = 1$, если $V_\mu \neq 0$). Как следствие, поскольку V однозначно определяет λ ($\lambda = \dim V - 1$), то старший вектор v_0 единственен в V, с точностью до ненулевого скалярного множителя.

В итоге доказана

Теорема 19. *Пусть V — неприводимый модуль над $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$.*

(a) *Относительно h модуль V является прямой суммой весовых подпространств V_μ, $\mu = m, m-2, \ldots, -(m-2), -m$, где $m+1 = \dim V$ и $\dim V_\mu = 1$ для каждого μ.*

(b) *В V имеется (с точностью до ненулевого скалярного множителя) единственный старший вектор, вес которого (называемый старшим весом для V) равен m.*

(c) *Действие алгебры L на V выражается приведенными формулами, если базис выбран как выше. Как следствие, существует (с точностью до изоморфизма) не более одного неприводимого L-модуля каждой возможной размерности $m+1$, $m \geqslant 0$.*

Следствие 11. *Пусть V — произвольный (конечномерный) L-модуль, $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Тогда все собственные значения эндоморфизма h на V целые, и каждое встречается с той же кратностью, что и противоположное. При этом в любом разложении модуля V в прямую сумму неприводимых подмодулей число слагаемых равно* $\dim V_0 + \dim V_1$.

Доказательство. При $V = 0$ доказательство не требуется. В остальных случаях запишем V с помощью теоремы Вейля как прямую сумму неприводимых подмодулей. Последние описаны в предыдущей теореме, и первое утверждение следствия очевидно. Для доказательства второго заметим, что каждый неприводимый L-модуль встречается ровно один раз, причем с весом 1 или 0 (но не с обоими). □

8.5 Максимальные торические подалгебры и корни

В этом пункте L будет обозначать полупростую алгебру Ли.

Если алгебра L состоит только из нильпотентных (то есть ad-нильпотентных) элементов, то они и сама нильпотентна (теорема Энгеля). В противном случае можно найти элемент $x \in L$ с ненулевой полупростой частью x_s в абстрактном разложении Жордана. Это показывает, что в L есть ненулевая подалгебра, состоящая из полупростых элементов (например, натянутая на x_s). Назовем такую алгебру *торической*. Следующая лемма имеет некоторое сходство с теоремой Энгеля:

Лемма 20. *Любая торическая подалгебра в L абелева.*

Доказательство. Пусть T — некоторая торическая подалгебра. Надо показать, что $\mathrm{ad}_T x = 0$ для всех $x \in T$. Поскольку отображение $\mathrm{ad}\, x$ диагонализируемо ($\mathrm{ad}\, x$ полупросто, а $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто), фактически нужно доказать, что у $\mathrm{ad}_T x$ нет ненулевых собственных значений.

Предположим противное: пусть $[x, y] = ay$, $a \neq 0$, для некоторого ненулевого элемента $y \in T$. Тогда сам элемент $\mathrm{ad}_T y(x) = -ay$ будет собственным вектором для $\mathrm{ad}_T y$ с собственным значением 0. С другой стороны, можно записать x как линейную комбинацию собственных векторов отображения $\mathrm{ad}_T y$ (при этом элемент y также полупрост); после применения $\mathrm{ad}_T y$ к x может остаться лишь комбинация собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям. Но это противоречило бы предыдущему выводу. □

Зафиксируем *максимальную торическую подалгебру* H в L, то есть такую, которая не содержится больше ни в какой торической подалгебре. Например, если $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, то в качестве H можно взять множество всех диагональных матриц (со следом 0).

Поскольку подалгебра H абелева, $\operatorname{ad}_L H$ представляет собой коммутирующее семейство полупростых эндоморфизмов алгебры L. Согласно известному результату из линейной алгебры, их можно одновременно диагонализировать. Иными словами, L является прямой суммой подпространств

$$L_\alpha = \{x \in L \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ для всех } h \in H\},$$

где α пробегает H^*.

Отметим, что L_0 — это просто $C_L(H)$, централизатор подалгебры H; он содержит H согласно лемме.

Множество всех ненулевых элементов $\alpha \in H^*$, для которых $L_\alpha \neq 0$, обозначается Φ; его элементы называются *корнями* алгебры L относительно H (и их количество конечно). В этих обозначениях мы получаем *разложение на корневые подпространства* (или *разложение Картана*):

$$L = C_L(H) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha.$$

Далее мы намерены, во-первых, доказать, что $H = C_L(H)$, затем подробнее описать множество корней и, наконец, показать, что Φ полностью описывает L.

8.6 Задачи

1. Докажите, что если алгебра L разрешима, то каждое ее неприводимое представление одномерно.

2. Пусть L — простая алгебра Ли, а $\beta(x, y)$ и $\gamma(x, y)$ — две симметрические ассоциативные билинейные формы на L. Докажите, что если формы β и γ невырожденны, то они пропорциональны (воспользуйтесь леммой Шура).

3. Пусть L' — полупростая подалгебра в полупростой алгебре Ли L. Если $x \in L'$, то разложение Жордана элемента x в L' совпадает с его разложением Жордана в L.

4. Алгебра $M = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ содержит $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ в виде подалгебры матриц, у которых последняя строка и последний столбец нулевые. Представьте M как прямую сумму неприводимых L-модулей (рассматривая M как L-модуль, соответствующий присоединенному представлению):

$$V(0) \oplus V(1) \oplus V(1) \oplus V(2).$$

9 Разложение на корневые подпространства

9.1 Еще раз о разложении Картана

Напомним, что в конце прошлой лекции мы ввели разложение на корневые подпространства

$$L = C_L(H) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha,$$

называемое *разложением Картана*, где

$$L_\alpha = \{x \in L \mid [h,x] = \alpha(h)x \text{ для всех } h \in H\}, \quad \alpha \in H^*,$$

H — максимальная торическая подалгебра в L.

Предложение 10. *Для любых $\alpha, \beta \in H^*$ выполняется включение $[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$. Если $x \in L_\alpha$, $\alpha \neq 0$, то оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. Если $\alpha, \beta \in H^*$, $\alpha + \beta \neq 0$, то подпространство L_α ортогонально к L_β относительно формы Киллинга $\varkappa$ на L.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из тождества Якоби: если $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$, $h \in H$, то

$$\operatorname{ad} h([x,y]) = [[h,x],y] + [x,[h,y]] = \alpha(h)[x,y] + \beta(h)[x,y] = (\alpha+\beta)(h)[x,y].$$

Второе утверждение непосредственно вытекает из первого.

Чтобы доказать оставшееся утверждение, найдем элемент $h \in H$, для которого $(\alpha+\beta)(h) \neq 0$. Тогда если $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$, то ввиду ассоциативности формы Киллинга

$$\varkappa([h,x],y) = -\varkappa([x,h],y) = -\varkappa(x,[h,y]),$$

а значит,

$$\alpha(h)\varkappa(x,y) = -\beta(h)\varkappa(x,y)$$

и

$$(\alpha+\beta)(h)\varkappa(x,y) = 0.$$

Как следствие, $\varkappa(x,y) = 0$. $\square$

Следствие 12. *Ограничение формы Киллинга на $L_0 = C_L(H)$ невырожденно.*

Доказательство. Мы знаем, что форма $\varkappa$ невырожденна на L. С другой стороны, согласно предложению алгебра L_0 ортогональна ко всем L_α, $\alpha \in \Phi$. Если элемент $z \in L_0$ также оротгонален к L_0, то $\varkappa(z, L) = 0$, откуда $z = 0$. $\square$

9.2 Централизатор подалгебры H

Нам понадобится следующий очевидный факт из линейной алгебры:

Лемма 21. *Если x, y — коммутирующие эндоморфизмы конечномерного векторного пространства, причем эндоморфизм y нильпотентен, то и xy нильпотентен; в частности, $\operatorname{tr}(xy) = 0$.*

Предложение 11. *Пусть H — максимальная торическая подалгебра в L. Тогда $H = C_L(H)$.*

Доказательство. Разобьем доказательство на шаги.

Положим $L_0 = C_L(H)$.

1. *Алгебра L_0 содержит полупростые и нильпотентные части своих элементов.* Сказать, что $x \in C_L(H)$ — означает сказать, что $\operatorname{ad} x$ отображает подпространство H алгебры L в 0. Тогда операторы $(\operatorname{ad} x)_s$ и $(\operatorname{ad} x)_n$ также обладают этим свойством (доказывали в свойствах разложения Жордана). Но в этом случае (как мы уже показывали), $(\operatorname{ad} x)_s = \operatorname{ad} x_s$ и $(\operatorname{ad} x)_n = \operatorname{ad} x_n$.

2. *Все полупростые элементы из L_0 лежат в H.* Если элемент x полупрост и коммутирует с H, то $H + \mathbb{F}x$ (ясно, что это абелева подалгебра в L) является торической подалгеброй: сумма коммутирующих полупростых элементов снова полупроста. Так как H — максимальная торическая подалгебра, то $H + \mathbb{F}x = H$, и потому $x \in H$.

3. *Ограничение формы $\varkappa$ на H невырожденно.* Пусть $\varkappa(h, H) = 0$ для некоторого $h \in H$; нужно показать, что $h = 0$. Если элемент $x \in L_0$ нильпотентен, то из равенства $[x, H] = 0$ и нильпотентности отображения $\operatorname{ad} x$ вытекает (ввиду предыдущей леммы), что $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$ при всех $y \in H$, то есть $\varkappa(x, H) = 0$. Но тогда из утверждений 1 и 2 следует, что $\varkappa(h, L_0) = 0$, а значит, $h = 0$ (так как ограничение формы $\varkappa$ на L_0 невырожденно).

4. *Алгебра L_0 нильпотентна.* Если элемент $x \in L_0$ полупрост, то $x \in H$ ввиду утверждения 2 и оператор $\operatorname{ad}_{L_0}(x)$ $(= 0)$ заведомо нильпотентен. С другой стороны, если $x \in L_0$ нильпотентен, то оператор $\operatorname{ad}_{L_0} x$ тем более нильпотентен. Пусть теперь $x \in L_0$ произволен, $x = x_s + x_n$. Поскольку x_s, x_n лежат в L_0 в силу утверждения 1, оператор $\operatorname{ad}_{L_0} x$ равен сумме коммутирующих нильпотентных операторов и потому сам нильпотентен. По теореме Энгеля алгебра L_0 нильпотентна.

5. *Выполнено равенство $H \cap [L_0, L_0] = 0$.* Поскольку форма $\varkappa$ ассоциативна и $[H, L_0] = 0$, то $\varkappa(H, [L_0, L_0]) = 0$. Теперь применим утверждение 3.

6. *Алгебра L_0 абелева.* В противном случае $[L_0, L_0] \neq 0$. Ввиду утверждения 4 L_0 нильпотентна, и мы имеем $Z(L_0) \cap [L_0, L_0] \neq 0$. Пусть $z \neq 0$ лежит в этом пересечении. Ввиду утверждений 2 и 5 элемент z не может быть полупростым. Поэтому его нильпотентная часть n не равна нулю и ввиду утверждения 1 лежит в L_0, а потому и в $Z(L_0)$ по свойствам разложения Жордана (коммутирует со всем, с чем коммутирует z). Но тогда из леммы 21 следует, что $\varkappa(n, L_0) = 0$, вопреки следствию 12.

7. *Выполнено равенство $L_0 = H$.* В противном случае L_0 содержит ненулевой нильпотентный элемент x ввиду утверждений 1 и 2. Согласно лемме и шагу 6 мы имеем

$$\varkappa(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0 \text{ при всех } y \in L_0,$$

что противоречит следствию 12. □

Следствие 13. *Ограничение формы $\varkappa$ на H невырожденно.*

Это следствие позволяет нам отождествить H с H^*: элементу $\varphi \in H^*$ отвечает (единственный) такой элемент $t_\varphi \in H$, что $\varphi(h) = \varkappa(t_\varphi, h)$ для всех $h \in H$. Тогда Φ отвечает подмножеству $\{t_\varphi \mid \alpha \in \Phi\}$ в H.

9.3 Свойства ортогональности

В этом пункте с помощью формы Киллинга мы получим более точную информацию о разложении на корневые подпространства. Мы уже видели, что $\varkappa(L_\alpha, L_\beta) = 0$, если $\alpha, \beta \in H^*$, $\alpha + \beta \neq 0$; в частности, $\varkappa(H, L_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in \Phi$, так что форма $\varkappa$ имеет невырожденное ограничение на H.

Предложение 12. (a) *Множество Φ порождает H^*.*

(b) *Если $\alpha \in \Phi$, то $-\alpha \in \Phi$.*

(c) *Пусть $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Тогда*

$$[x, y] = \varkappa(x, y) t_\alpha.$$

(d) *Если $\alpha \in \Phi$, то пространство $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ одномерно с образующим t_α.*

(e) *Справедливо соотношение $\alpha(t_\alpha) = \varkappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$ для $\alpha \in \Phi$.*

(f) *Если $\alpha \in \Phi$, а x_α — любой ненулевой элемент в L_α, то существует такой элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, что элементы x_α, y_α,*
$h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ порождает трехмерную простую подалгебру в L. Ее изоморфизм с $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ задают формулы

$$x_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(g) *Справедливы равенства*

$$h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\varkappa(t_\alpha, t_\alpha)}; \quad h_\alpha = -h_{-\alpha}.$$

Доказательство. (a) Если Φ не порождает H^*, то (по двойственности) существует ненулевой элемент $h \in H$, что $\alpha(h) = 0$ при всех $\alpha \in \Phi$. Но это означает, что $[h, L_\alpha] = 0$ при всех $\alpha \in \Phi$. Поскольку $[h, H] = 0$, отсюда в свою очередь следует, что $[h, L] = 0$, то есть $h \in Z(L) = 0$, что невозможно.

(b) Пусть $\alpha \in \Phi$. Если $-\alpha \notin \Phi$ (то есть $L_{-\alpha} = 0$), то

$$\varkappa(L_\alpha, L_\beta) = 0 \text{ при всех } \beta \in H^*.$$

Поэтому $\varkappa(L_\alpha, L) = 0$, вопреки невырожденности формы $\varkappa$.

(c) Пусть $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Возьмем произвольный элемент $h \in H$. Поскольку форма $\varkappa$ ассоциативна,

$$\varkappa(h,[x,y])\varkappa([h,x],y) = \alpha(h)\varkappa(x,y) = \\ = \varkappa(t_\alpha,h)\varkappa(x,y) = \varkappa(\varkappa(x,y)t_\alpha,h) = \varkappa(h,\varkappa(x,y)t_\alpha).$$

Это означает, что подалгебра H ортогональна к $[x,y]-\varkappa(x,y)t_\alpha$, а значит, $[x,y]=\varkappa(x,y)t_\alpha$.

(d) Шаг (c) показывает, что t_α порождает подалгебру $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$, если она ненулевая. Пусть $0 \neq x \in L$. Если $\varkappa(x, L_{-\alpha}) = 0$, то $\varkappa(x,L)=0$ (см. шаг (b)), что невозможно, поскольку форма $\varkappa$ невырожденна. Поэтому найдется $0 \neq y \in L_{-\alpha}$, для которого $\varkappa(x,y) \neq 0$. Ввиду шага (c) мы получаем, что $[x,y] \neq 0$.

(e) Пусть $\alpha(t_\alpha) = 0$, так что $[t_\alpha, x] = 0 = [t_\alpha, y]$ при всех $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Как и на шаге (d), можно при этом выбрать x, y так, что $\varkappa(x,y) \neq 0$. После умножения одного из этих элементов на скаляр можно считать, что $\varkappa(x,y) = 1$. Тогда $[x,y] = t_\alpha$ ввиду утверждения (c). Следовательно, подпространство S в L, натянутое на x, y, t_α, является трехмерной разрешимой алгеброй, $S \cong \mathrm{ad}_L S \subset \mathfrak{gl}(L)$. Как следствие, отображение $\mathrm{ad}_L s$ нильпотентно при всех $s \in [S,S]$, поэтому отображение $\mathrm{ad}_L t_\alpha$ одновременно полупросто и нильпотентно, то есть $\mathrm{ad}_L t_\alpha = 0$. Это означает, что $t_\alpha \in Z(L) = 0$, вопреки выбору t_α.

(f) Для данного элемента x_α, $0 \neq x_\alpha \in L_\alpha$, найдем такой элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, что

$$\varkappa(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{\varkappa(t_\alpha, t_\alpha)}.$$

Это возможно ввиду утверждения (e) и того, что $\varkappa(x_\alpha, L_{-\alpha}) \neq 0$. Положим

$$h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\varkappa(t_\alpha, t_\alpha)}.$$

Тогда $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ ввиду утверждения (c). При этом

$$[h_\alpha, x_\alpha] = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)}[t_\alpha, x_\alpha] = \frac{2\alpha(t_\alpha)}{\alpha(t_\alpha)}x_\alpha = 2x_\alpha$$

и аналогично $[h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha$. Таким образом, элементы $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha$ порождают трехмерную подалгебру в L с той же таблицей умножения, что и в $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$.

(g) Напомним, что t_α определяется условием $\varkappa(t_\alpha, h) = \alpha(h)$, $h \in H$. Это показывает, что $t_\alpha = -t_{-\alpha}$, и наше утверждение вытекает из способа определения h_α. $\square$

9.4 Свойства целочисленности

Для данной пары корней $\alpha, -\alpha$ пусть $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ — подалгебра в L, построенная как в предыдущем предложении. На прошлой лекции мы полностью описали все (конечномерные) S_α-модули, что позволяет описать и $\mathrm{ad}_L S_\alpha$.

Фиксируем $\alpha \in \Phi$. Вначале рассмотрим подпространство M в L, порожденное подалгеброй H вместе со всеми корневыми подпространствами вида $L_{c\alpha}$, $c \in \mathbb{F}^*$. В силу их устройства это S_α-подмодуль в L. Мы знаем, что веса элемента h_α на M целочисленны,

а именно, равны нулю и $2c = c\alpha(h_\alpha)$ (для таких ненулевых значений c, что $L_{c\alpha} \neq 0$). Как следствие, все значения c здесь кратны $1/2$. При этом S_α действует тривиально на $\ker \alpha$, а $\ker \alpha$ — подпространство коразмерности 1 в H, дополнительное к $\mathbb{F}h_\alpha$. С другой стороны, сама подалгебра S_α является неприводимым S_α-подмодулем в M. Вес 0 для h_α появляется только в подпространствах $\ker \alpha$ и S_α. Следовательно, все четные числа, встречающиеся в M, равны 0 и ± 2. Это показывает, что 2α — не корень, то есть удвоенный корень никогда не является корнем. Но тогда и $(1/2)\alpha$ не может быть корнем, поэтому 1 не является весом для h_α в M. Но на прошлой лекции было следствие, которое вычисляло разложение модуля в сумму неприводимых по кратности весов 0 и 1, поэтому мы имеем $M = H + S_\alpha$, а значит,
$\dim L_\alpha = 1$ (таким образом, S_α однозначно определяется как подалгебра, которую L_α и $L_{-\alpha}$ порождают в L) и среди кратных корня α корнями являются лишь $\pm\alpha$.

Теперь изучим действие алгебры S_α на корневых подпространствах L_β, $\beta \neq \pm\alpha$.

Положим $K = \sum\limits_{i \in \mathbb{Z}} L_{\beta + i\alpha}$. Согласно предыдущему абзацу каждое корневое подпространство одномерно и ни одно из значений $\beta + i\alpha$ не равно нулю. Поэтому K является S_α-подмодулем в L с одномерными корневыми подпространствами для различных целочисленных весов $\beta(h_\alpha) + 2i$ (где $i \in \mathbb{Z}$ таково, что $\beta + i\alpha \in \Phi$).

Ясно, что 0 и 1 одновременно не могут быть весами такого вида, и ввиду того же следствия модуль K неприводим. Старший (соответственно, младший) вес должен равняться $\beta(h_\alpha)+2q$ (соответственно, $\beta(h_\alpha)-2r$), где q (соответственно, r) — наибольшее целое число, для которого $\beta + q\alpha$ (соответственно, $\beta - r\alpha$) является корнем. При этом веса модуля K образуют арифметическую прогрессию с разностью 2, и поэтому корни $\beta + i\alpha$ образуют серию (*α-серию, порожденную корнем β*) $\beta - r\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + r\alpha$. Отметим также, что

$$(\beta - r\alpha)(h_\alpha) = -(\beta + q\alpha)(h_\alpha), \text{ или } \beta(h_\alpha) = r - q.$$

Наконец, заметим, что если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$, то $\operatorname{ad} L_\alpha$ отображает L_β на $L_{\alpha+\beta}$, то есть $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.

В итоге получаем

Предложение 13. (a) *Если $\alpha \in \Phi$, то $\dim L_\alpha = 1$. Как следствие,*

$$S_\alpha = L_\alpha + L_{-\alpha} + H_\alpha, \text{ где } H_\alpha = [L_\alpha, L_{-\alpha}],$$

и для данного ненулевого элемента $x_\alpha \in L_\alpha$ существует единственный такой элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, что $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$.

(b) *Если $\alpha \in \Phi$, то среди произведений корня на скаляры являются корнями только α и $-\alpha$.*

(c) *Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ и $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$. Числа $\beta(h_\alpha)$ называются числами Картана.*

(d) *Если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$, то $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.*

(e) *Пусть $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta \neq \pm\alpha$. Далее, пусть r, q — наибольшие целые числа, для которых $\beta - r\alpha, \beta + q\alpha$ соответственно являются корнями. Тогда $\beta + i\alpha \in \Phi$ при $-r \leqslant i \leqslant q$ и $\beta(h_\alpha) = r - q$.*

(f) *Алгебра Ли L порождается корневыми подпространствами L_α.*

9.5 Свойства рациональности. Выводы

В этом пункте L — полупростая алгебра Ли (над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ характеристики ноль), H — ее максимальная торическая подалгебра, $\Phi \subset H^*$ — множество корней в L (относительно H),

$$L = H + \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

— разложение на корневые подпространства.

Так как ограничение формы Киллинга на H невырожденно, мы можем перенести ее на H^*, положив $(\gamma, \delta) = \varkappa(t_\gamma, t_\delta)$ при всех $\gamma, \delta \in H^*$. Мы знаем, что Φ порождает H^*, поэтому в H^* можно выбрать базис $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, состоящий из корней. Любой корень $\beta \in \Phi$ можно единственным образом представить в виде

$$\beta = \sum_{i=1}^{l} c_i \alpha_i, \text{ где } c_i \in \mathbb{F}.$$

Мы утверждаем, что на самом деле $c_i \in \mathbb{Q}$.

Чтобы убедиться в этом, потребуются некоторые факты из линейной алгебры.

Для каждого $j = 1, \dots, l$ мы имеем

$$(\beta, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{l} c_i (\alpha_i, \alpha_j)$$

и после умножения обеих частей на $\frac{2}{(\alpha_j, \alpha_j)}$ получаем

$$\frac{2(\beta, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^{l} \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} c_i.$$

Это равенство можно считать системой l уравнений от l неизвестных c_i с целыми (тем самым и рациональными) коэффициентами. Поскольку $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ — базис в H^*, а форма невырожденна, невырожденна и матрица (α_i, α_j), $1 \leqslant i, j \leqslant l$; тогда это верно и для матрицы коэффициентов нашей системы уравнений. Мы заключаем, что система имеет единственное решение в $\mathbb{Q}$, что и доказывает наше утверждение.

Итак, мы показали, что $\mathbb{Q}$-подпространство $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ в H^*, натянутое на все корни, имеет $\mathbb{Q}$-размерность $l = \dim_{\mathbb{F}} H^*$. Верно даже более: напомним, что если $\lambda, \mu \in H^*$, то

$$(\lambda, \mu) = \varkappa(t_\lambda, t_\mu) = \sum \alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu) = \sum (\alpha, \lambda)(\alpha, \mu),$$

где сумма взята по $\alpha \in \Phi$. В частности, для $\beta \in \Phi$ мы имеем $(\beta, \beta) = \sum (\alpha, \beta)^2$. Разделив на $(\beta, \beta)^2$, получаем

$$\frac{1}{(\beta, \beta)} = \sum \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)^2}.$$

Правая часть этого равенства рациональна, так как мы доказали выше, что числа

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}$$

— целые. Следовательно, $(\beta, \beta) \in \mathbb{Q}$, а значит, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$. Как следствие, все скалярные произведения векторов в $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ рациональны, и мы получаем невырожденную форму на $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$. Как и выше, $(\lambda, \lambda) = \sum(\alpha, \lambda)^2$, поэтому величина (λ, λ) при $\lambda \in \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ является суммой квадратов рациональных чисел и, значит, положительна (кроме случая $\lambda = 0$). Таким образом, полученная форма на $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ положительно определена.

Пусть теперь $\mathbb{E}$ — вещественное векторное пространство, получаемое при замене основного поля $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{E} := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}.$$

Форма продолжается на $\mathbb{E}$ естественным образом и остается положительно определенной в силу предыдущий замечаний, то есть $\mathbb{E}$ превращается в евклидово пространство. В множестве Φ содержится его базис и $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{E} = l$.

Основные факты о множестве Φ собраны в следующей теореме:

Теорема 20. *Пусть $L, H, \Phi, \mathbb{E}$ таковы, как выше. Тогда*

(a) *Множество Φ порождает $\mathbb{E}$ и не содержит нуля.*

(b) *Если $\alpha \in \Phi$, то $-\alpha \in \Phi$, но никакое другое произведение скаляра на α не является корнем.*

(c) *Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то*

$$\beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \in \Phi.$$

(d) *Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то*

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, мы видим, что Φ является настоящей системой корней в смысле определений, введенных в этих лекциях.

При этом есть дополнительное свойство, которой мы не вносили в определение системы корней:

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \alpha, \beta \in \Phi.$$

Проверим, какие из полученных нами в первых лекциях систем корней удовлетворяют этому свойству и могут быть системами корней, используемыми для разложения полупростой алгебры Ли.

9.6 Проверка подходящих систем корней

Лемма 22. *Если $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$ для всех корней $\alpha, \beta \in \Phi$, а $\varphi_{\alpha,\beta}$ — угол между корнями α и β, то*

$$4\cos^2 \varphi_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \alpha, \beta \in \Phi.$$

Доказательство. Прямая простая проверка:

$$\mathbb{Z} \ni \left(\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\right)\left(\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}\right) = 4\frac{\cos^2 \varphi_{\alpha,\beta}\|\alpha\|\|\beta\|\|\alpha\|\|\beta\|}{l\alpha\|^2\|\beta\|^2} = 4\cos^2 \varphi_{\alpha,\beta}.$$

$\square$

Теперь надо определить все углы, для которых $4\cos^2\varphi \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что $2\cos^2\varphi = 1 + \cos 2\varphi$, то есть $2\cos 2\varphi \in \mathbb{Z}$, откуда следует, что $2\varphi = 0, \pm\pi/3, \pm\pi/2, \pm 2\pi/3, \pi$, откуда сразу получаем, что системы корней $\mathbf{H}_3$ и $\mathbf{H}_4$ не подходят, а для систем корней $\mathbf{I}_2(m)$ возможными вариантами являются только $m = 6$ (к которой мы привыкли как к системе корней $\mathbf{G}_2$.

Значит, нам нужно будет позже показать, что для всех оставшихся систем корней ($\mathbf{A}_l$, $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$, $\mathbf{D}_l$, $\mathbf{E}_l$, $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$) существуют полупростые алгебры Ли, им соответствующие.

9.7 Задачи

1. Пусть L — классическая линейная алгебра Ли типа $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$ или $\mathbf{D}_l$. Докажите, что множество всех диагональных матриц в L является максимальной торической подалгеброй размерности l.

2. Для каждой алгебры из упражнения 1 найдите все корни и корневые подпространства.

3. Пусть $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Докажите, что каждая максимальная торическая подалгебра в L одномерна.

4. Найдите базис в $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$, двойственный к стандартному (относительно формы Киллинга).

5. Докажите, что все трехмерные полпростые алгебры Ли имеют ту же систему корней, что и $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, и, как следствие, изоморфны ей.

10 Лекция 10. Теоремы об изоморфизме и сопряженности

10.1 Теорема об изоморфизме

Наша цель — доказать, что две полупростые алгебры Ли с одинаковой системой корней изоморфны.

Предложение 14. *Пусть L — простая алгебра Ли, подалгебра H и система Φ такие же, как в прошлой лекции. Тогда Φ — неприводимая система корней.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 ортогональны. Если $\alpha \in \Phi_1$, $\beta \in \Phi_2$, то $(\alpha+\beta, \alpha) \neq 0$, $(\alpha+\beta, \beta) \neq 0$, поэтому $\alpha+\beta$ не может быть корнем и $[L_\alpha, L_\beta] = 0$. Следовательно, подалгебра K в L, порожденная всеми L_α, $\alpha \in \Phi_1$, поэлементно коммутирует со всеми L_β, $\beta \in \Phi_2$; как следствие, K — собственная подалгебра в L, поскольку $Z(L) = 0$. Далее, в нормализаторе подалгебры K содержатся все L_α, $\alpha \in \Phi_1$, тогда и все L_α, $\alpha \in \Phi$, а значит, и L. Следовательно, K — собственный ненулевой идеал в алгебре L, что противоречит ее простоте. $\square$

Пусть теперь L — произвольная полупростая алгебра Ли. Тогда L представляется единственным образом как прямая сумма простых идеалов $L_1 \oplus \cdots \oplus L_t$. Если H — максимальная торическая подалгебра в L, то

$$H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_t, \text{ где } H_i = L_i \cap H.$$

Очевидно, что H_i — торическая подалгебра в L_i при любом i, в действительности максимальная: любая большая торическая подалгебра в L_i автоматически будет торической в L, при этом она поэлементно коммутирует с H_j, $j \neq i$, и вместе с ними порождает торическую подалгебру в L, большую чем H.

Пусть Φ_i обозначает систему корней алгебры L_i относительно H_i в вещественном векторном пространстве $\mathbb{E}_i$. Если $\alpha \in \Phi_i$, то мы вправе считать α линейной функцией на H, положив $\alpha(H_j) = 0$ при $j \neq i$. Очевидно, что тогда α — корень алгебры L относительно H, причем $L_\alpha \subset L_i$.

Обратно, если $\alpha \in \Phi$, то $[H_i, L_\alpha] \neq 0$ при некотором i (иначе H поэлементно коммутирует с L_α), поэтому $L_\alpha \subset L_i$ и $\alpha|_{H_i}$ — корень алгебры L_i относительно H.

Изложенное показывает, что Φ можно представить в виде
$\Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_t$ и соответственно $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}_t$.

Из предыдущего предложения получаем

Следствие 14. *Пусть L — полупростая алгебра Ли с максимальной торической подалгеброй H и системой корней Φ. Если $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_t$ — ее разложение на простые идеалы, то $H_i = H \cap L_i$ является максимальной торической подалгеброй в L_i, а соответствующая (неприводимая) система корней Φ_i имеет естественное вложение в Φ, причем $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_t$ является разложением системы Φ на неприводимые компоненты.*

Проблема характеризации полупростой алгебры Ли посредством ее системы корней сводится ввиду этого следствия к случаю простой алгебры (и неприводимой системы корней).

Выберем теперь достаточно малое число образующих в L.

Предложение 15. *Пусть L — полупростая алгебра Ли, H — ее максимальная торическая подалгебра, Φ — система корней в L относительно H. Зафиксируем в Φ базис Δ. Тогда L порождается (как алгебра Ли) корневыми подпространствами L_α, $L_{-\alpha}$, $\alpha \in \Delta$, или, эквивалентно, L порождается произвольными ненулевым корневыми векторами $x_\alpha \in L_\alpha$, $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, $\alpha \in \Delta$.*

Доказательство. Пусть β — произвольный положительный корень (относительно Δ). Тогда можно записать корень β в виде суммы

$$\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s, \quad \alpha_i \in \Delta,$$

где каждая частичная сумма $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$ является корнем (упражнение 1).

Мы знаем также, что если $\gamma, \delta, \gamma + \delta \in \Phi$, то $[L_\gamma, L_\delta] = L_{\gamma+\delta}$. С помощью индукции по s легко убедиться, что L_β лежит в подалгебре, порожденной в L всеми подалгебрами L_α, $\alpha \in \Delta$. Точно так же, если β отрицательно, то L_β лежит в подалгебре, порожденной в L всеми $L_{-\alpha}$, $\alpha \in \Delta$. Но

$$L = H + \bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha \text{ и } H = \sum_{\alpha\in\Phi} [L_\alpha, L_{-\alpha}],$$

откуда и следует наше утверждение. $\square$

Если $0 \neq x_\alpha \in L_\alpha$, $0 \neq y_\alpha \in L_{-\alpha}$, $\alpha \in \Delta$, и $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$, то будем называть $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ или $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ *стандартным множеством образующих для* L. Напомним, что h_α — единственный элемент в $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$, на котором α принимает значение 2.

Пусть каждая из пар (L, H) и (L', H') состоит из простой алгебры Ли и ее максимальной торической подалгебры. Мы хотим доказать, что изоморфизм соответствующих (неприводимых) систем корней Φ, Φ' индуцирует изоморфизм между L и L', отображающий H на H'.

По определению изоморфизм $\Phi \to \Phi'$ индуцирован изоморфизмом $\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ соответствующих евклидовых пространств, который не обязательно является изометрией. Однако аксиомы систем корней остаются справедливыми при умножении скалярного произведения в $\mathbb{E}$ или в $\mathbb{E}'$ на положительное вещественное число. Поэтому мы вправе считать, что изоморфизм $\Phi \to \Phi'$ порожден изометрией евклидовых пространств.

Теперь заметим, что изоморфизм $\Phi \to \Phi'$ единственным образом продолжается до изоморфизма векторных пространств $\psi : H^* \to H'^*$ (поскольку Φ порождает H^*, а Φ' порождает H'^*). В свою очередь ψ индуцирует изоморфизм $\pi : H \to H'$, если с помощью формы Киллинга отождествить пространства H, H' с двойственными. Более конкретно, если $\alpha \mapsto \alpha'$ обозначает данное отображение $\Phi \to \Phi'$, то $\pi(t_\alpha) = t'_{\alpha'}$, где t_α и $t'_{\alpha'}$ с помощью формы Киллинга отождествлены с α, α'. Поскольку данный изоморфизм между Φ и Φ' порождается изометрией между соответствующими евклидовыми пространствами, из соотношения $h_\alpha = 2t_\alpha/(\alpha, \alpha)$ следует также, что $\pi(h_\alpha) = h'_{\alpha'}$.

Так как H, H' — абелевы алгебры Ли, π можно даже рассматривать как изоморфизм алгебр Ли. Хотелось бы продолжить его до изоморфизма $L \to L'$ (который мы также обозначим через π). Если такое продолжение существует, то нетрудно понять, что подалгебра L_α должна отображаться на L'_α при всех $\alpha \in \Phi$. Тогда возникает вопрос: насколько возможно определить заранее элемент из L'_α, в который отображается данных $x_\alpha \in L_\alpha$?

Ясно, что выбор всевозможных $x'_{\alpha'}$, $\alpha' \in \Phi'$, не вполне произволен: а именно, если $x_\alpha, x_\beta, x_{\alpha+\beta}$ удовлетворяют условию $[x_\alpha, x_\beta] = x_{\alpha+\beta}$, то должно выполняться равенство $[x'_{\alpha'}, x'_{\beta'}] = x'_{\alpha'+\beta'}$. Это приводит к мысли, что нужно сосредоточиться на простых корнях, где выбор можно делать независимо.

Теорема 21. *Пусть L, L' — простые алгебры Ли над $\mathbb{F}$ с максимальными торическими подалгебрами H, H' и системами корней Φ, Φ' соответственно. Предположим, что существует изоморфизм между Φ и Φ' (обозначаемый $\alpha \mapsto \alpha'$), который индуцирует изоморфизм $\pi : H \to H'$. Зафиксируем базис $\Delta \subset \Phi$, тогда $\Delta' = \{\alpha' \mid \alpha \in \Delta\}$ будет базисом в Φ'.*
Для каждого $\alpha \in \Delta$ выберем произвольные (ненулевые) $x_\alpha \in L_\alpha$, $x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$ (то есть выберем произвольный изоморфизм алгебр Ли $\pi_\alpha : L_\alpha \to L'_{\alpha'}$). Тогда существует единственный изоморфизм $\pi : L \to L'$, продолжающий $\pi : H \to H'$ и все π_α, $\alpha \in \Delta$.

Доказательство. Единственность изоморфизма π (если он существует) устанавливается немедленно: x_α, $\alpha \in \Delta$, определяет единственный элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, для которого $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$, а ввиду предыдущего предложения алгебра L порождается совокупностью всех x_α, y_α, $\alpha \in \Delta$.

Идея доказательства существования несложна. Если алгебры L и L' по существу одинаковы, то их прямая сумма $L \oplus L'$ (полупростая алгебра Ли с двумя простыми идеалами L и L') должна включать подалгебру D, которая напоминает “диагональную” подалгебру $\{(x, x) \mid x \in L\}$ в $L \oplus L$ и изоморфно отображается на L при проектировании на каждое из прямых слагаемых.

Такую подалгебру D в $L \oplus L'$ легко построить: пусть, как и выше, x_α, $\alpha \in \Delta$, определяет единственный элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, для которого $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$, и, аналогично, $x'_{\alpha'}$, $\alpha' \in \Delta'$, определяет $y'_{\alpha'} \in L'_{-\alpha'}$. Пусть D порождается элементами

$$\overline{x}_\alpha = (x_\alpha, x'_{\alpha'}), \quad \overline{y}_\alpha = (y_\alpha, y'_{\alpha'}), \quad \overline{h}_\alpha = (h_\alpha, h'_{\alpha'}) \text{ для всех } \alpha \in \Delta.$$

Главная трудность состоит в том, чтобы показать, что D — это собственная подалгебра; могло бы оказаться, что она содержит элементы вида $(x_\alpha, x'_{\alpha'})$ и $(x_\alpha, 2x'_{\alpha'})$, где $x_\alpha \in L_\alpha$, $x_{\alpha'}; \in L'_{\alpha'}$ для каких-то корней α, α'. Тогда подалгебра D целиком содержала бы L' и L, а следовательно, и $L \oplus L'$. Невозможность такой ситуации трудно усмотреть непосредственно, поэтому выберем окольный путь.

Поскольку идеалы L, L' просты, системы Φ, Φ' неприводимы. Поэтому в системах Φ, Φ' имеются однозначно определенные максимальные корни β, β' (относительно базисов Δ, Δ'). Эти корни соответствуют друг другу при данном изоморфизме $\Phi \to \Phi'$ (упражнение 2)

Возьмем произвольные ненулевые элементы $x \in L_\beta$, $x' \in L'_{\beta'}$ и положим $\overline{x} = (x, x') \in L \oplus L'$. Пусть подпространство M в $L \oplus L'$ натянуто на все элементы вида

$$\operatorname{ad} \overline{y}_{\alpha_1} \operatorname{ad} \overline{y}_{\alpha_2} \ldots \operatorname{ad} \overline{y}_{\alpha_m}(\overline{x}), \qquad (*)$$

где $\alpha_i \in \Delta$ (повторения допускаются). Очевидно, что такой элемент лежит в

$$L_{\beta - \sum \alpha_i} \oplus L'_{\beta' - \sum \alpha'_i};$$

поэтому подпространство $M\cap(L_\beta\oplus L'_{\beta'})$ одномерно, и, значит, M — собственное подпространство в $L\oplus L'$.

Мы утверждаем, что подалгебра D оставляет подпространство M инвариантным.

Нужно проверить это для ее образующих. Элемент $\operatorname{ad}\overline{y}_\alpha$, $\alpha\in\Delta$, оставляет M инвариантным по определению. Это верно и для h_α, как показывает несложная индукция, основанная на том факте, что $[h,y_\alpha]$ и y_α пропорциональны. С другой стороны, в случае простого α мы знаем, что $\operatorname{ad}x_\alpha$ коммутирует с $\operatorname{ad}y_\gamma$ при всех простых γ, кроме случая $\gamma=\alpha$, так как $\alpha-\gamma$ не является корнем при $\gamma\neq\alpha$.

Поэтому, применяя $\operatorname{ad}\overline{x}_\alpha$ к $(*)$, мы можем переставить его со всеми $\operatorname{ad}\overline{y}_\gamma$, кроме $\operatorname{ad}\overline{y}_\alpha$. В последнем случае появляется дополнительное слагаемое, содержащее $\operatorname{ad}\overline{h}_\alpha$. Но мы уже учли слагаемые такого вида. Поскольку $\operatorname{ad}\overline{x}_\alpha(\overline{x})=0$ при всех $\alpha\in\Delta$ (помним, что $\alpha+\beta\notin\Phi$, так как β — старший корень), то в итоге получаем, что M инвариантно относительно $\operatorname{ad}\overline{x}_\alpha$.

Теперь очевидно, что D — собственная подалгебра: иначе подпространство M оказалось бы собственным ненулевым идеалом в $L\oplus L'$, но такими являются лишь идеалы L,L', заведомо не совпадающие с M.

Мы утверждаем, что проектирования подалгебры D на первое и второе слагаемое в $L\oplus L'$ являются изоморфизмами алгебр Ли.

Из общих соображений эти проектирования являются гомоморфизмами алгебр Ли, и они сюръективны ввиду предыдущего предложения и способа определения подалгебры D. С другой стороны, пусть D имеет ненулевое пересечение с подалгеброй L (то есть с ядром проектирования на второе слагаемое). Это означает, что D содержит такой элемент $(w,0)$, что $w\neq 0$; тогда D содержит и все элементы

$$(\operatorname{ad}z_{\alpha_1}\dots\operatorname{ad}z_{\alpha_s}(w),0),\qquad \alpha_i\in\Delta,\quad z_\alpha=x_\alpha \text{ или } y_\alpha.$$

Эти элементы образуют ненулевой идеал в L (согласно предложению), который должен совпадать с L (так как алгебра L проста). Как следствие, D содержит L. По симметрии D содержит L', а тогда и $L\oplus L'$, что неверно.

Наконец заметим, что изоморфизм $L\to L'$, построенный с помощью D, отображает x_α в $x'_{\alpha'}$, $\alpha\in\Delta$, и h_α в $h'_{\alpha'}$, а потому совпадает с π на H. Это нам и требовалось. $\square$

Очевидно, что теорема легко распространяется на полупростые алгебры.

10.2 Автоморфизмы

Теорема об изоморфизме оказывается весьма полезной при доказательстве существования автоморфизмов полупростой алгебры Ли L (здесь H,Φ такие же, как раньше). Каждый автоморфизм системы Φ определяет автоморфизм подалгебры H, который можно продолжить на L.

В качестве полезного примера возьмем отображение, меняющее знак у каждого корня. Оно, очевидно, лежит в $\operatorname{Aut}\Phi$ и индуцированное отображение $\sigma: H\to H$ переводит h в $-h$. В частности, $\sigma(h_\alpha)=-(h_\alpha)$, но мы помним, что этот элемент совпадает с $h_{-\alpha}$. применить только что доказанную теорему, потребуем, чтобы элемент x_α отображался в $-y_\alpha$, $\alpha\in\Delta$. (Отметим, что единственный элемент $z\in L_\alpha$, для которого $[-y_\alpha,z]=h_{-\alpha}$, равен $-x_\alpha$). Согласно теореме σ продолжается до автоморфизма алгебры L, отображающего x_α в $-y_\alpha$, $\alpha \in \Delta$. Из предыдущего замечания в скобках тогда вытекает, что y_α отображается в $-x_\alpha$ при $\alpha \in \Delta$. При этом σ имеет порядок два, поскольку σ^2 оставляет на месте образующие алгебры L. В итоге получаем

Предложение 16. *Пусть алгебра L такова, как в теореме, но не обязательно проста. Зафиксируем (ненулевой) элемент $x_\alpha \in L_\alpha$, $\alpha \in \Delta$, и пусть $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ удовлетворяет условию $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Тогда L обладает таким автоморфизмом σ порядка два, что*

$$\sigma(x_\alpha) = -y_\alpha, \quad \sigma(y_\alpha) = -x_\alpha, \quad \alpha \in \Delta; \qquad \sigma(h) = -h, \quad h \in H.$$

10.3 Разложение алгебры L относительно $\operatorname{ad} x$

В первом пункте сегодняшней лекции мы доказали, что пара (L, H), состоящая из полупростой алгебры и ее максимальной торической подалгебры, с точностью до изоморфизма определяется системой корней Φ. Однако могло бы оказаться, что другая максимальная торическая подалгебра H' соответствует совершенно иной системе Φ'.

Покажем, что алгебра L уже определяет систему Φ. Для этого, разумеется, достаточно показать, что все максимальные торические подалгебры в L сопряжены относительно $\operatorname{Aut} L$. Это мы в скором времени сделаем, причем в более общем случае произвольной алгебры Ли L, когда аналогом торической становится картановская подалгебра.

Снова напомним, что если $t \in \operatorname{End} V$, то V является прямой суммой всех подпространств $V_\alpha = \ker(t - a \cdot 1)^m$, где m — кратность корня a в характеристическом многочлене для t. Каждое V_a инвариантно относительно эндоморфизма t, а ограничение последнего на V_a равно сумме скаляра a и нильпотентного эндоморфизма.

В частности, это относится к действию элемента x в присоединенном представлении алгебры Ли L. Положим

$$L = \bigoplus_{a \in \mathbb{F}} L_a(\operatorname{ad} x) = L_0(\operatorname{ad} x) \oplus L_*(\operatorname{ad} x),$$

где $L_*(\operatorname{ad} x)$ обозначает сумму тех $L_a(\operatorname{ad} x)$, для которых $a \neq 0$. Более общо, если K — подалгебра в L, инвариантная относительно $\operatorname{ad} x$, то можно записать $K = K_0(\operatorname{ad} x) \oplus K_*(\operatorname{ad} x)$, даже если $x \notin K$.

Лемма 23. *Если $a, b \in \mathbb{F}$, то*

$$[L_a(\operatorname{ad} x), L_b(\operatorname{ad} x)] \subset L_{a+b}(\operatorname{ad} x).$$

Как следствие, $L_0(\operatorname{ad} x)$ является подалгеброй в L, и если $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$, $a \neq 0$, то каждый элемент из $L_0(\operatorname{ad} x)$ является ad-нильпотентным.

Доказательство. Вспомним такую формулу:

$$(\operatorname{ad} x - a - b)^m [y, z] = \sum_{i=0}^{m} C_m^i [(\operatorname{ad} x - a)^i (y), (\operatorname{ad} x - b)^{m-i}(z)].$$

Как следствие, если $y \in L_a(\operatorname{ad} x)$, $z \in L_b(\operatorname{ad} x)$, то при достаточно больших m все слагаемые в правой части равны нулю. □

10.4 Подалгебры Энгеля

Согласно только что доказанной лемме 23 подпространство $L_0(\operatorname{ad} x)$, где $x \in L$, является подалгеброй в L. Назовем ее *подалгеброй Энгеля.* Следующие две леммы сыграют главную роль в нашем исследовании картановских подалгебр.

Лемма 24. *Пусть K — подалгебра в L, а элемент $z \in K$ таков, что подалгебра $L_0(\operatorname{ad} z)$ минимальна в множестве всех $L_0(\operatorname{ad} x)$, $x \in K$. Пусть $K \subset L_0(\operatorname{ad} z)$. Тогда*

$$L_0(\operatorname{ad} z) \subset L_0(\operatorname{ad} x) \text{ для всех } x \in K.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольный элемент $x \in K$ и рассмотрим семейство $\{\operatorname{ad}(z + cx) \mid c \in \mathbb{F}\}$ эндоморфизмов алгебры L. Поскольку подалгебра $K_0 = L_0(\operatorname{ad} z)$ содержит K, она инвариантна относительно этих эндоморфизмов, поэтому они индуцируют эндоморфизмы пространства L/K_0. Как следствие, характеристический многочлен эндоморфизма $\operatorname{ad}(z + cx)$ можно представить как произведение $f(t, c)g(t, c)$ его характеристических многочленов на K_0 и L/K_0 соответственно (с переменной t). Если $r = \dim K_0$, $n = \dim L$, то можно записать

$$\begin{aligned} f(t, c) &= t^r + f_1(c)t^{r-1} + \cdots + f_r(c), \\ g(t, c) &= t^{n-r} + g_1(c)t^{n-r-1} + \cdots + g_{n-r}(c). \end{aligned}$$

При переходе на матричный язык становится видно, что коэффициенты $f_i(c)$, $g_i(c)$ являются многочленами от c степени не выше i.

Нулевое собственное значение эндоморфизма $\operatorname{ad} z$ по определению встречается только в подпространстве K_0. Положив $c = 0$, видим, что g_{n-r} не является тождественным нулем на $\mathbb{F}$. Поэтому можно найти сколько угодно различных скаляров, не являющихся корнями для g_{n-r}. Пусть $c_1, \ldots, c_{r+1}$ обладают этим свойством. Сказать, что $g_{n-r}(c) \neq 0$ — означает потребовать, чтобы 0 не был собственным значением для $\operatorname{ad}(z + cx)$ на факторпространстве; в этом случае $L_0(\operatorname{ad}(z + cx))$ лежит в подпространстве K_0. Но последнее минимально по условию, и поэтому

$$L_0(\operatorname{ad} z) = L_0(\operatorname{ad}(z + c_i x)) \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant r + 1.$$

Это в свою очередь означает, что $\operatorname{ad}(z + c_i x)$ имеет на $L_0(\operatorname{ad} z)$ лишь нулевое собственное значение, то есть $f(t, c_i) = t^r$. Поэтому каждый из многочленов $f_1, \ldots, f_r$ (степени не выше r) имеет $r + 1$ различных нулей $c_1, \ldots, c_{r+1}$. Как следствие, все эти многочлены тождественно равны нулю.

Итак, мы показали, что

$$L_0(\operatorname{ad}(z + cx)) \supset K_0 \text{ при всех } c \in \mathbb{F}.$$

Поскольку элемент x произволен, теперь можно заменить его на $x - z$ и положить $c = 1$, получив в результате

$$L_0(\operatorname{ad} x) \supset L_0(\operatorname{ad} z).$$

□

Лемма 25. *Если подалгебра K в L содержит подалгебру Энгеля, то $N_L(K) = K$. В частности, подалгебры Энгеля самонормализуемы.*

Доказательство. Пусть $K \supset L_0(\operatorname{ad} x)$. Тогда $\operatorname{ad} x$ при действии на $N_L(K)/K$ не имеет нулевого собственного значения. С другой стороны, это действие тривиально, так как из того, что $x \in K$, следует включение $[N_L(K), x] \subset K$. Вместе это означает, что $K = N_L(K)$. $\square$

10.5 Картановские подалгебры

Картановская подалгебра алгебры Ли L — это нильпотентная подалгебра, совпадающая со своим нормализатором в L. Недостаток этого определения в том, что он не гарантирует существования таких подалгебр (и действительно, над конечными полями этот вопрос до сих пор не выяснен полностью). Если алгебра L полупроста и $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$, то максимальная торическая подалгебра H абелева (и, значит, нильпотентна). При этом $N_L(H) = H$, так как

$$L = H + \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha, \text{ где } [H, L_\alpha] = L_\alpha \text{ при } \alpha \in \Phi.$$

Таким образом, в этом случае картановские подалгебры действительно существуют (и играют важную роль).

Справедлива и более общая

Теорема 22. *Пусть. H — подалгебра алгебры Ли L. Тогда H — картановская подалгебра, если и только если она является минимальной алгеброй Энгеля (как следствие, картановская подалгебра всегда существует).*

Доказательство. Вначале предположим, что $H = L_0(\operatorname{ad} z)$ является подалгеброй Энгеля в L; по лемме 25 она самонормализуема. Если при этом H не включает строго никакую другую подалгебру Энгеля, то выполнены предположения леммы 24 при $H = K$. Значит,

$$H = L_0(\operatorname{ad} z) \subset L_0(\operatorname{ad} x) \text{ для всех } x \in H.$$

В частности, тогда элемент $\operatorname{ad}_H x$ нильпотентен, и по теореме Энгеля алгебра H нильпотентна.

Обратно, пусть H — картановская подалгебра в L. Так как она нильпотентна, то $H \subset L_0(\operatorname{ad} x)$ при всех $x \in H$. Мы хотим, чтобы при каком-то x выполнялось равенство. Предположим противное и рассмотрим минимально возможную подалгебру $L_0(\operatorname{ad} z)$, $z \in H$. Снова можно применить лемму 24, и мы получим

$$L_0(\operatorname{ad} x) \supset L_0(\operatorname{ad} z) \text{ для всех } x \in H.$$

Это означает, что в индуцированном представлении подалгебры H на ненулевом векторном пространстве $L_0(\operatorname{ad} z)/H$ все ее элементы действуют как нильпотентные эндоморфизмы. Как следствие, H аннулирует некоторый ненулевой вектор $y + H$; другими словами, существует элемент $y \notin H$, для которого $[H, y] \subset H$. Это противоречит предположению о самонормализуемости подалгебры H. $\square$

Следствие 15. *Пусть алгебра L полупроста* $(\operatorname{char}\mathbb{F}=0)$. *Тогда картановские подалгебры в L — это в точности ее максимальные торические подалгебры.*

Доказательство. Перед формулировкой теоремы мы отметили, что все максимальные торические подалгебры являются картановскими подалгебрами. Обратно, пусть H — картановская подалгебра. Заметим, что если $x=x_s+x_n$ — разложение Жордана элемента $x\in L$, то $L_0(\operatorname{ad}x_s)\subset L_0(\operatorname{ad}x)$: если элемент y аннулируется некоторой степенью оператора $\operatorname{ad}x_s$, то он аннулируется и степенью оператора $\operatorname{ad}x$, поскольку $\operatorname{ad}x_n$ нильпотентен и коммутирует со всеми $\operatorname{ad}x_s$.

Заметим также, что если элемент $x\in L$ полупрост, то оператор $\operatorname{ad}x$ диагонализируем и $L_0(\operatorname{ad}x)=C_L(x)$. Согласно теореме картановская подалгебра H является минимальной подалгеброй Энгеля и имеет вид $L_0(\operatorname{ad}x)$. Ввиду ее минимальности и предыдущих замечаний

$$H=L_0(\operatorname{ad}x_s)=C_L(x_s).$$

Но очевидно, что $C_L(x_s)$ содержит максимальную торическую подалгебру. Мы уже знаем, что она является картановской подалгеброй, а тогда, в свою очередь, и минимальной подалгеброй Энгеля. Как следствие, H является максимальной торической подалгеброй. $\square$

В качестве следствия из доказательства отметим, что максимальная торическая подалгебра в полупростой алгебре Ли $(\operatorname{char}\mathbb{F}=0)$ имеет вид $C_L(s)$ для некоторого полупростого элемента s. Такой элемент s называется *регулярным полупростым*.

10.6 Задачи

1. Докажите, что любой положительный корень $\beta\in\Phi^+$ можно записать в виде частичной суммы $\beta=\alpha_1+\cdots+\alpha_s$, $\alpha_i\in\Delta$, где каждая частичная сумма $\alpha_1+\cdots+\alpha_i$ является корнем (простые корни в сумме могут повторяться).

2. Докажите, что если системы корней Φ и Φ' изоморфны, при изоморфизме базис Δ системы Φ переходит в базис $\Delta'\subset\Phi'$, то максимальный корень β относительно Δ переходит в максимальный корень β' относительно Δ'.

3. Обобщите теорему 21 на случай полупростой алгебры L.

4. Докажите, что полупростой элемент в $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$ регулярен, если и только если все его собственные значения различны.

5. Пусть алгебра L полупроста $(\operatorname{char}\mathbb{F}=0)$ и элемент $x\in L$ полупрост. Докажите, что элемент x регулярен, если и только если x лежит ровно в одной картановской подалгебре.

11 Лекция 11. Теоремы о сопряженности

В этой лекции $\mathbb{F}$ предполагается алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Мы намереваемся доказать, что в произвольной алгебре Ли L над полем $\mathbb{F}$ все картановские подалгебры сопряжены относительно группы внутренних автоморфизмов $\operatorname{Int} L$ (порожденной всеми отображениями $\exp \operatorname{ad} x$, где элемент $x \in L$ является ad-нильпотентным). В случае полупростой алгебры L это означает, что все максимальные торические подалгебры сопряжены; как следствие, L однозначно определяется (с точностью до изоморфизма) своей системой корней относительно любой максимальной торической подалгебры. В качестве вспомогательного шага мы докажем также, что все максимальные разрешимые подалгебры в L сопряжены.

11.1 Группа $\mathcal{E}(L)$.

Пусть L — алгебра Ли. Назовем элемент $x \in L$ *строго* ad*-нильпотентным*, если $x \in L_a(\operatorname{ad} y)$ для некоторого $y \in L$ и a — некоторого ненулевого собственного значения отображения $\operatorname{ad} y$. Этот термин оправдан тем, что такой элемент x должен быть ad-нильпотентен. Пусть $\mathcal{N}(L)$ обозначает множество всех строго ad-нильпотентных элементов в L, $\mathcal{E}(L)$ — подгруппу в $\operatorname{Int} L$, порожденную всеми операторами $\exp \operatorname{ad} x$, $x \in \mathcal{N}(L)$. Отметим, что множество $\mathcal{N}(L)$ инвариантно относительно $\operatorname{Aut} L$, поэтому подгруппа $\mathcal{E}(L)$ нормальна в $\operatorname{Aut} L$.

Нам удобнее работать с $\mathcal{E}(L)$, а не со всей группой $\operatorname{Int} L$, поскольку группа $\mathcal{E}(L)$ имеет более хорошие функторные свойства. Например, если K — подалгебра в L, то заведомо $\mathcal{N}(K) \subset \mathcal{N}(L)$. Это позволяет определить подгруппу $\mathcal{E}(K; L)$ в $\mathcal{E}(L)$, порожденную всеми операторами $\exp \operatorname{ad}_L x$, $x \in \mathcal{N}(K)$. Тогда $\mathcal{E}(K)$ получается просто как ограничение $\mathcal{E}(K; L)$ на K. Напротив, между $\operatorname{Int} K$ и $\operatorname{Int} L$ такой прямой связи нет, поскольку для элемента $x \in K$ с нильпотентным оператором $\operatorname{ad}_K x$ мы не можем ничего сказать об $\operatorname{ad}_L x$.

Ясно, что если $\varphi : L \to L'$ — эпиморфизм и $y \in L$, то

$$\varphi(L_a(\operatorname{ad} y)) = L'_a(\operatorname{ad} \varphi(y)).$$

Отсюда $\varphi(\mathcal{N}(L)) = \mathcal{N}(L')$.

Лемма 26. *Пусть дан эпиморфизм $\varphi : L \to L'$. Если $\sigma' \in \mathcal{E}(L')$, то существует оператор $\sigma \in \mathcal{E}(L)$, для которого*

$$\sigma' \circ \varphi = \varphi \circ \sigma.$$

Доказательство. Достаточно доказать это в случае $\sigma' = \exp \operatorname{ad}_{L'} x'$, $x' \in \mathcal{N}(L')$. Ввиду предыдущего замечания $x' = \varphi(x)$ хотя бы для одного $x \in \mathcal{N}(L)$. Для произвольного $z \in L$ имеем

$$(\varphi \circ \exp \operatorname{ad}_L x)(z) = \varphi\left(z + [x, z] + \frac{1}{2}[x, [x, z]] + \dots\right) =$$
$$= \varphi(z) + \left([x', \varphi(z)] + \frac{1}{2}[x', [x', \varphi(z)]] + \dots\right) = (\exp \operatorname{ad}_{L'} x' \circ \varphi)(z).$$

Это и требовалось. $\square$

11.2 Сопряженность картановских подалгебр (разрешимый случай)

Лемма 27. *Пусть $\varphi : L \to L'$ — эпиморфизм алгебр Ли. Тогда если H — картановская подалгебра в L, то $\varphi(H)$ — картановская подалгебра в L'.*

Доказательство. Ясно, что подалгебра $\varphi(H)$ нильпотентна. Положим $A = \ker\varphi$ и отождествим L' с L/A. Если $x + A$ лежит в нормализаторе подалгебры $H + A$, то $x \in N_L(H + A)$. Но $H + A$ содержит картановскую подалгебру (а тем самым и минимальную подалгебру Энгеля), поэтому $H + A$ самонормализуема (мы доказывали это на прошлой лекции). Следовательно, $x \in H + A$, то есть подалгебра $\varphi(H)$ самонормализуема. □

Теорема 23. *Пусть алгебра L разрешима и $\mathcal{E}(L)$ — группа, определенная в прошлом пункте. Тогда любые две картановские подалгебры H_1 и H_2 сопряжены относительно $\mathcal{E}(L)$.*

Доказательство. Применим индукцию по $\dim L$.

Если $\dim L = 1$ (или алгебра L нильпотентна), то утверждение тривиально. Пусть алгебра L не нильпотентна. Так как она разрешима, в ней имеются ненулевые абелевы идеалы (например, последний ненулевой член производного ряда): пусть A — один из них, с наименьшей возможной размерностью.

Положим $L' := L/A$, а каноническое отображение $\varphi : L \to L/A$ обозначим как $x \mapsto x'$. Тогда по лемме 27 подалгебры H_1' и H_2' будут картановскими подалгебрами в (разрешимой) алгебре L'.

По предположению индукции существует оператор $\sigma' \in \mathcal{E}(L')$, отображающий H_1' на H_2'. Тогда при некотором $\sigma \in \mathcal{E}(L)$ будет выполняться равенство из леммы 26. Это означает, что σ отображает $K_1 = \varphi^{-1}(H_1')$ на $K_2 = \varphi^{-1}(H_2')$. Но тогда H_2 и $\sigma(H_1)$ являются картановскими подалгебрами в K_2. Если K_2 не совпадает с L, то в силу предположения индукции найдется такой оператор $\tau' \in \mathcal{E}'(K_2)$, что $\tau'\sigma(H_1) = H_2$. Но $\mathcal{E}(K_2)$ состоит из ограничений элементов из $\mathcal{E}(L; K_2) \subset \mathcal{E}(L)$ на K_2; поэтому если $\tau \in \mathcal{E}(L)$ при ограничении на K_2 дает τ', то $\tau\sigma(H_1) = H_2$, что и требуется.

Если же $L = K_2 = \sigma(K_1)$, то в действительности $K_1 = K_2$ и $L = H_2 + A = H_1 + A$. В этом случае мы должны явно построить автоморфизм алгебры L (что требуется только в этом месте доказательства!) Мы знаем, что картановская подалгебра H_2 имеет вид $L_0(\operatorname{ad} x)$ для подходящего элемента $x \in L$. Поскольку идеал A инвариантен относительно $\operatorname{ad} x$, то

$$A = A_0(\operatorname{ad} x) \oplus A_*(\operatorname{ad} x),$$

причем каждое слагаемое инвариантно относительно действия $L = H_2 + A$. Ввиду минимальности идеала A либо $A = A_0(\operatorname{ad} x)$, либо $A = A_*(\operatorname{ad} x)$. В первом случае мы получили бы $A \subset H_2$, $L = H_2$, что невозможно, поскольку алгебра L не нильпотентна. Поэтому $A = A_*(\operatorname{ad} x)$, откуда очевидным образом следует, что $A = L_*(\operatorname{ad} x)$.

Поскольку $L = H_1 + A$, можно записать $x = y + z$, где $y \in H_1$, $z \in L_*(\operatorname{ad} x)$. В свою очередь положим

$$z = [x, z'], \qquad z' \in L_*(\operatorname{ad} x),$$

используя обратимость оператора $\operatorname{ad} x$ на $L_*(\operatorname{ad} x)$. Так как идеал A абелев, $(\operatorname{ad} z')^2 = 0$, поэтому $\exp \operatorname{ad} z' = E_L + \operatorname{ad} z'$; применительно к x это приводит к равенству

$$\exp \operatorname{ad} z'(x) = x - z = y.$$

Поэтому подалгебра $H = L_0(\operatorname{ad} y)$ также должна быть картановской в L. Поскольку $y \in H_1$, мы заключаем, что $H \supset H_1$, а значит $H = H_1$ (так как это минимальные подалгебры Энгеля). Поэтому подалгебра H_1 сопряжена с H_2 посредством $\exp \operatorname{ad} z'$.

Остается заметить, что $\exp \operatorname{ad} z'$ лежит в $\mathcal{E}(L)$: действительно, z' можно записать как сумму строго ad-нильпотентных элементов z_i из $A = L_*(\operatorname{ad} x)$, но последние коммутируют (идеал A абелев), поэтому

$$\exp \operatorname{ad} z' = \prod_i \exp \operatorname{ad} z_i \in \mathcal{E}(L).$$

□

11.3 Борелевские подалгебры

Для перехода от разрешимого случая к общему мы используем *борелевские подалгебры* алгебры Ли L, то есть — по определению — ее максимальные разрешимые подалгебры. Если мы сумеем показать, что любые две борелевские подалгебры в L сопряжены относительно $\mathcal{E}(L)$, то ввиду теоремы 23 будут сопряжены и все картановские подалгебры в L.

Лемма 28. *Пусть B — борелевская подалгебра в L. Тогда*

$$B = N_L(B).$$

Доказательство. Пусть $x \in N_L(B)$. Тогда $B + \mathbb{F}x$ — подалгебра в L, причем разрешимая, так как $[B + \mathbb{F}x, B + \mathbb{F}x] \subset B$. Поскольку подалгебра B максимальна, то $x \in B$. □

Лемма 29. *Если $\operatorname{Rad} L \neq L$, то борелевские подалгебры в L и в полупростой алгебре $L/\operatorname{Rad} L$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии.*

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Rad} L$ — разрешимый идеал в L, то мы заключаем, что $B + \operatorname{Rad} L$ — разрешимая подалгебра для любой борелевской подалгебры B, и поэтому $\operatorname{Rad} L \subset B$. Отсюда непосредственно следует утверждение леммы. □

Из этой леммы вытекает, что существенен лишь случай полупростой алгебры L.

В этой ситуации пусть H — картановская подалгебра, Φ — система корней в L относительно H. Фиксируем базис Δ, а вместе с ним и множество положительных корней. Положим

$$N(\Delta) := \bigoplus_{\alpha > 0} L_\alpha, \qquad B(\Delta) := H + N(\Delta).$$

Мы знаем, что тогда $B(\Delta)$ будет подалгеброй в L с производной алгеброй $N(\Delta)$. При этом алгебра $N(\Delta)$ нильпотентна: если $x \in L_\alpha$, $\alpha \in \Phi^+$, то для корней положительной высоты (относительно Δ) применение $\operatorname{ad} x$ к корневым векторам увеличивает высоту не менее чем на единицу, это заставляет убывающий центральный ряд сходиться к нулю. Как следствие, подалгебра $B(\Delta)$ разрешима. На самом деле мы утверждаем, что $B(\Delta)$ — борелевская подалгебра.

Действительно, пусть K — произвольная подалгебра в L, строго включающая $B(\Delta)$. Тогда подалгебра K, будучи инвариантной относительно $\operatorname{ad} H$, должна включать L_α при некотором $\alpha \in \Phi^-$. Но тогда K включает и простую алгебру S_α; как следствие, K не может быть разрешимой.

Лемма 30. *Пусть алгебра L полупроста, с картановской подалгеброй H и системой корней Φ. Для каждого базиса $\Delta \subset \Phi$ подалгебра $B(\Delta)$ является борелевской в L (и называется стандартной относительно H). Все такие подалгебры сопряжены относительно $\mathcal{E}(L)$.*

Доказательство. Осталось доказать лишь второе утверждение. Напомним (прошлая лекция), что отражение σ_α, действующее на H, можно продолжить до внутреннего автоморфизма τ_α на L, который (по построению) принадлежит $\mathcal{E}(L)$. Ясно, что этот автоморфизм отображает $B(\Delta)$ на $B(\sigma_\alpha\Delta)$. Учитывая, что группа Вейля порождается отражениями и действует на базисах транзитивно, мы видим, что $\mathcal{E}(L)$ транзитивно действует на борелевских подалгебрах, стандартных относительно H. □

11.4 Сопряженность борелевских подалгебр.

Теорема 24. *Все борелевские подалгебры произвольной алгебры Ли сопряжены относительно $\mathcal{E}(L)$.*

Следствие 16. *Картановские подалгебры произвольной алгебры Ли L сопряжены относительно $\mathcal{E}(L)$.*

Доказательство следствия. Пусть H, H' — две картановские подалгебры в L. Каждая из них, будучи нильпотентной (а потому и разрешимой), лежит хотя бы в одной борелевской подалгебре, скажем, в B и B' соответственно. По теореме существует такой оператор $\sigma \in \mathcal{E}(L)$, что $\sigma(B) = B'$. Так как $\sigma(H)$ и H' являются картановскими подалгебрами в разрешимой алгебре B', то по теореме 23 существует оператор $\tau' \in \mathcal{E}(B')$, для которого $\tau'\sigma(H) = H'$. Но τ' является ограничением на B' некоторого оператора $\tau \in \mathcal{E}(L; B') \subset \mathcal{E}(L)$, так что в итоге

$$\tau\sigma(H) = H', \qquad \tau\sigma \in \mathcal{E}(L).$$

□

Доказательство теоремы. Проведем индукцию по $\dim L$. Случай $\dim L = 1$ тривиален. Ввиду лемм 26 и 29 с учетом предположения индукции можно считать, что алгебра L полупроста. Фиксируем некоторую стандартную борелевскую подалгебру B (относительно некоторой картановской подалгебры). Достаточно показать, что любая другая борелевская подалгебра B' сопряжена к B относительно $\mathcal{E}(L)$.

Если $B \cap B' = B$, то доказывать нечего (так как тогда $B' = B$ по свойству максимальности). Поэтому, используя спуск по $\dim(B \cap B')$, будем считать, что если пересечение борелевской подалгебры с B (или с подалгеброй, сопряженной с B) имеет большую размерность, то эта борелевская подалгебра сопряжена B.

1. Вначале предположим, что $B \cap B' \neq 0$. Возможны два случая.

Случай (i): *множество N' нильпотентных элементов в $B \cap B'$ состоит не только из нуля.*

Поскольку алгебра B стандартна, N' является подпространством и производная алгебра для $B \cap B'$ состоит из нильпотентных элементов. В свою очередь, отсюда следует, что N' является идеалом в $B \cap B'$. Разумеется, N' не является идеалом в L, поэтому его нормализатор K — собственная подалгебра в L.

Теперь покажем, что $B \cap B'$ строго содержится и в $B \cap K$, и в $B' \cap K$. В самом деле, рассмотрим действие множества N' на $B/(B \cap B')$, индуцированное отображением ad. Каждый элемент $x \in N'$ действует на этом векторном пространстве нильпотентно, поэтому найдется ненулевой смежный класс $E + (B \cap B')$, который они все аннулируют, то есть такой, что

$$[x, y] \in B \cap B', \qquad y \notin B \cap B'.$$

Но элемент $[x, y]$ лежит и в $[B, B]$, поэтому он нильпотентен; как следствие,

$$[x, y] \in N' \text{ и } y \in N_B(N') = B \cap K,$$

тогда как $y \notin B \cap B'$. Аналогично $B \cap B'$ строго содержится в $B' \cap K$.

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[d, dash] & \\
 & K \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
C \arrow[d, dash] & & C' \arrow[d, dash] \\
B \cap K \arrow[dr, dash] & & B' \cap K \arrow[dl, dash] \\
 & B \cap B' \arrow[d, dash] & \\
 & N' &
\end{tikzcd}$$

С другой стороны, $B \cap K$ и $B' \cap K$ — разрешимые подалгебры в K. Пусть соответственно C, C' — содержащие их борелевские подалгебры в K. Поскольку $K \neq L$, ввиду предположения индукции существует такой автоморфизм $\sigma \in \mathcal{E}(L; K) \subset \mathcal{E}(L)$, что $\sigma(C') = C$. Так как $B \cap B'$ — собственная (ненулевая) подалгебра как в C, так и в C', второе индуктивное предположение обеспечивает существование такого $\tau \in \mathcal{E}(L)$, что $\tau\sigma(C') \subset B$ (то есть τ отображает на B борелевскую подалгебру из L, содержащую $\sigma(C') = C$).

Наконец,

$$B \cap \tau\sigma(B') \supset \tau\sigma(C') \cap \tau\sigma(B') \supset \tau\sigma(B' \cap K) \supset \tau\sigma(B \cap B')$$

(последнее включение строгое), так что размерность алгебры $B \cap B'$ меньше, чем размерность алгебры $B \cap \tau\sigma(B')$. Снова применяя второе индуктивное предположение, мы видим, что алгебра B сопряжена $\tau\sigma(B')$ относительно $\mathcal{E}(L)$, и случай (i) разобран.

Случай (ii): *в алгебре $B \cap B'$ нет ненулевых нильпотентных элементов.*

Заметим, что любая борелевская подалгебра в L содержит полупростые и нильпотентные части своих элементов ввиду разложения Жордана–Шевалле (что полупростые и нильпотентные части отображают подпространства туда же, куда и сам элемент) и леммы 28. Это сразу показывает, что $B \cap B' = T$ является торической подалгеброй. Теперь используем тот факт, что B — стандартная борелевская подалгебра. Например, пусть

$$B = B(\Delta), \qquad N = N(\Delta), \qquad B = H + N.$$

Поскольку

$$[B, B] = N \text{ и } T \cap N = 0,$$

мы получаем, что $N_B(T) = C_B(T)$.

Пусть C — некоторая картановская подалгебра в $C_B(T)$; тогда, в частности, C нильпотентна и

$$T \subset N_{C_B(T)}(C) = C.$$

Если $n \in N_B(C)$, $t \in T \subset C$, то $(\operatorname{ad} t)^k n = 0$ для некоторого k, поскольку подалгебра C нильпотентна. Но эндоморфизм $\operatorname{ad} t$ полупрост, поэтому $k = 1$ и $n \in C_B(T)$.

Таким образом,

$$N_B(C) = N_{C_B(T)}(C) = C.$$

Будучи нильпотентной и самонормализуемой в B, подалгебра C является картановской (и содержит T). Но мы доказали, что тогда C — максимальная торическая подалгебра в L, сопряженная H относительно $\mathcal{E}(B)$ (а тем самым и относительно $\mathcal{E}(L)$). Поэтому без потери общности можно теперь считать, что $T \subset H$.

Предположим, что $T = H$. Ясно, что H содержится строго в B', поэтому B' содержит хотя бы одно подпространство L_α, где $\alpha \in \Phi^-$ относительно Δ. При отображении τ_α B' переходит в борелевскую подалгебру B'', пересечение которой с B содержит $H + L_{-\alpha}$; поэтому из второго индуктивного предположения вытекает, что подалгебра B'' сопряжена к B, что нам и требуется.

Пусть теперь T строго содержится в H. Либо B' содержится в $C_L(T)$, либо нет. В первом случае можно применить первое индуктивное предположение, поскольку

$$\dim C_L(T) < \dim L \qquad (T \neq 0 \text{ и } Z(L) = 0).$$

А именно, поскольку $H \subset C_L(T)$, в $C_L(T)$ существует борелевская подалгебра B'', содержащая H. Ввиду предположения индукции найдется эндоморфизм $\sigma \in \mathcal{E}(L; C_L(T)) \subset \mathcal{E}(L)$, отображающий B' на B''. Как следствие, B'' является борелевской подалгеброй в L, включающей H, и ввиду второго индуктивного предположения сопряжена B относительно $\mathcal{E}(L)$.

Осталось рассмотреть случай $B' \not\subset C_L(T)$. Тогда $\operatorname{ad} T$ имеет общий собственный вектор $x \in B'$ и существует элемент $t \in T$, для которого $[t, x] = ax$, где число a рационально и положительно. Положим $S = H + \oplus L_\alpha$, где $\alpha \in \Phi$ пробегает те корни, для которых $\alpha(t)$ рационально и положительно. Ясно, что S является подалгеброй в L (и $x \in S$). Кроме того, легко видеть, что подалгебра S разрешима.

Пусть B'' — борелевская подалгебра в L, которая включает S. Поскольку $B'' \cap B' \supset T + \mathbb{F}x$ строго содержит $T = B' \cap B$, мы получаем, что

$$\dim(B'' \cap B') > \dim(B \cap B').$$

Аналогично $B'' \cap B \supset H$ строго содержит T, поэтому

$$\dim(B'' \cap B) > \dim(B' \cap B).$$

Применив к последнему неравенству второе индуктивное предположение, мы видим, что подалгебра B'' сопряжена к B. В частности, очевидно, что подалгебра B'' стандартна относительно картановской подалгебры, сопряженной H. Теперь можно применить второе индуктивное предположение к первому неравенству (поскольку подалгебра B'' стандартна), и мы получаем, что подалгебра B'' сопряжена B'. Тогда и подалгебра B сопряжена B'.

2. Мы разобрали все случаи, когда $B \cap B' \neq 0$. Теперь посмотрим, что случится, если $B \cap B' = 0$. Тогда

$$\dim L \geqslant \dim B + \dim B',$$

так как подалгебра B стандартна, как мы знаем,

$$\dim B > \frac{1}{2} \dim L,$$

так что подалгебра B' должна быть достаточно малой. Более конкретно, пусть T — максимальная торическая подалгебра в B'. Если $T = 0$, то подалгебра B' состоит из нильпотентных элементов; следовательно, по теореме Энгеля, B' нильпотентна, а также она самонормализуема по лемме 28; значит, B' — картановская подалгебра. Но это невозможно, так как мы знаем, что все картановские подалгебры являются торическими. Поэтому $T \neq 0$. Если H_0 — максимальная торическая подалгебра в L, содержащая T, то B' имеет ненулевое пересечение с любой стандартной борелевской подалгеброй B'' относительно H_0. Следовательно, согласно первой части доказательства подалгебра B' сопряжена B'' и

$$\dim B' = \dim B'' > \frac{1}{2} \dim L,$$

вопреки малости подалгебры B'.

□

Следствие 16 позволяет приписать произвольной алгебре Ли L над $\mathbb{F}$ численный инвариант $\operatorname{rank} L$, называемый *рангом*, а именно, размерность картановской подалгебры в L. Если алгебра полупроста, то $\operatorname{rank} L$ совпадает с $\operatorname{rank} \Phi$, где Φ — система корней в L относительно любой максимальной торической (то есть картановской) подалгебры.

Полезно отметить одно побочное следствие теоремы о сопряженности борелевских подалгебр. Пусть алгебра L полупроста и имеет картановскую подалгебру H и систему корней Φ. Мы утверждаем, что *любая борелевская подалгебра B в L, содержащая H, стандартна.* Действительно, пусть $\sigma(B(\Delta)) = B$, где Δ — некоторый базис в Φ, $\sigma \in \mathcal{E}(L)$. Поскольку H и $\sigma(H)$ — картановские подалгебры в B, они сопряжены относительно $\mathcal{E}(L; B) \subset \mathcal{E}(L)$ и можно считать, что $\sigma(H) = H$. Тогда ясно, что если $\alpha \in \Phi^+$, то $\sigma\alpha$ является корнем и $\sigma(L_\alpha) = L_{\sigma\alpha}$. При этом перестановка корней под действием σ сохраняет суммы, так что $\sigma(\Delta) = \Delta'$ — тоже базис в Φ и подалгебра $B = B(\Delta')$ стандартна.

11.5 Задачи.

1. Докажите, что группа $\mathcal{E}(L)$ тривиальна, если и только если алгебра L нильпотентна.

2. Пусть алгебра L полупроста, H — ее картановская подалгебра, Δ — базис системы корней Φ. Докажите, что любая подалгебра в L, состоящая из нильпотентных элементов и максимальная с этим свойством, сопряжена относительно $\mathcal{E}(L)$ подалегбре $N(\Delta)$, производной алгебре для $B(\Delta)$.

3. Пусть Ψ — замкнутое подмножество корней (в том смысле, что из того, что $\alpha, \beta \in \Psi$, $\alpha + \beta \in \Phi$ следует, что $\alpha + \beta \in \Psi$), причем $\Psi \cap (-\Psi) = \emptyset$. Докажите, что Ψ содержится в множестве положительных корней относительно некоторого базиса в Ψ.

4. Пусть алгебра L полупроста. Если ее полпростой элемент регулярен, то он принадлежит лишь конечному множеству борелевских подалгебр.