

Г.Б.Шабат,
Подсчёт детских рисунков и когомологии пространств
модулей кривых

Цель доклада: воспроизвести основную конструкцию и сформулировать несколько результатов из [Norbury201X].

В обычных обозначениях нашего семинара *квазимногочлен Норбери*

$$\mathcal{N}_{g,n} : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N} : (p_1, \dots, p_n) \mapsto \#\{D \in \mathbf{DESS}_{g,n[\text{val}_0 \geq 2]}^! \mid \text{"perim"} \ i \equiv p_i\}$$

Квазимногочлен – это функция, которая ограничивается на классы смежности по некоторой решётке конечного индекса как многочлен.

Теорема (Norbury 3.8). *Для любого набора чётностей $\mathbf{e} \in \{0, 1\}^n$ существуют такие многочлены $\mathcal{N}\mathcal{N}_{g,n}^{\mathbf{e}} \in \mathbb{Q}[b_1^2, \dots, b_n^2]$, что*

$$\mathcal{N}_{g,n}(2b_1 + e_1, \dots, 2b_n + e_n) \equiv \mathcal{N}\mathcal{N}_{g,n}^{\mathbf{e}}(b_1^2, \dots, b_n^2).$$

Далее будет использоваться только многочлен

$$\mathcal{N}^{\text{even}} := \mathcal{N}\mathcal{N}^{(0, \dots, 0)}$$

Интуитивно ясна (???, см. [Mirzakhani2007], [MulasePenkava2012])

Теорема (Norbury 3.9). *Имеет место равенство старших коэффициентов*

$$\mathcal{N}^{\text{even}} = 2V_{g,n}^{\text{Kontsevich}} + \text{lower terms}$$

Следствие (Norbury 3.10). *Если $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ удовлетворяет*

$$\sum_{i=1}^n d_i = 3g - 3 + n,$$

то

$$c_{\mathbf{d}} := \langle d_1, \dots, d_n \rangle := \frac{1}{2^{6g-6+2n-g}} \int_{\mathcal{M}_{g,n}(\mathbb{C})} c_1(L_1)^{d_1} \wedge \dots \wedge c_1(L_n)^{d_n}$$

удовлетворяют

$$\mathcal{N}_{g,n}^{\text{even}}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{\mathbf{d}} c_{\mathbf{d}} \mathbf{P}^{2\mathbf{d}} + \text{lower terms}$$

Теорема (Norbury 3.11).

$$\mathcal{N}_{g,n}^{\text{even}}(\mathbf{0}) = \chi^{\text{orbi}}(\mathcal{M}_{g,n}).$$

Относительно вычислений когомологий подсчётом точек в $\mathcal{M}_{g,n}(\mathbb{F}_q)$ см. диссертацию [Bergström2006]. Алгоритмы описаны в [Murri2012].

Литература

- [Bergström2006] Jonas Bergström, *Point counts and the cohomology of moduli spaces of curves*. Doctoral thesis, Stockholm, KTH, 2006.
- [Mirzakhani2007] M. Mirzakhani, *Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves*. J. Amer. Math. Soc. 20, 1 (2007), 1–23.
- [MulasePenkava2012] Motohico Mulase, Michael Penkava, *Topological recursion for the Poincaré polynomial of the combinatorial moduli space of curves*. Adv. Math. 230(2012), 1322-1339.
- [Murri2012] Riccardo Murri, *Fatgraph Algorithms and the Homology of the Kontsevich Complex*, arXiv:1202.1820v2.
- [Norbury201X] Paul Norbury, *Cell decompositions of moduli space, lattice points and Hurwitz problems*. Handbook of Moduli. Advanced Lectures in Mathematics 24 (2013), Volume III, 39-74.