Решения

1. Покажите, что произведение любых ста транспозиций (в любом порядке), порождающих симметрическую группу S_{101}, является циклом длины 101.

(Задача взята из работы
https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/22113/0000540.pdf)

Решение. Возьмём множество из ста транспозиций $\tau_1, \ldots, \tau_{100}$, порождающих S_{101}. Рассмотрим граф со 101 вершиной и рёбрами, которые соединяют i и j, если $\tau_k = (ij)$. Этот граф должен быть связным. Иначе можно разбить числа $\{1, 2, \ldots, 101\}$ на два непустых непересекающихся подмножества M и N так, что каждая транспозиция меняет местами два элемента M или два элемента N. Тогда любая перестановка должна отображать элементы M в элементы M, что не верно. Значит, в этом связном графе 101 вершина и 100 рёбер. То есть это дерево. Далее задача следует из следующего утверждения.

Утверждение. *Пусть есть дерево на вершинах на множестве $M \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Произведение в любом порядке транспозиций, соответствующих рёбрам этого дерева – это цикл на множестве M.*

Доказательство. Доказывать будем по индукции по количеству вершин n. База индукции $n = 2$. Только одна траспозиция – это цикл длины 2. Шаг индукции. Пусть у нас есть произведение n транспозиций и пусть τ – последняя. Дерево без ребра, соответствующего τ – это объединение 2-х деревьев: одно на множестве M_1, а другое – на множестве M_2, где $M_1 \cup M_2 = M$ и $NM_1 \cap M_2 = \varnothing$. По предположению индукции произведение транспозиций в каждом из них этих деревьев – это цикл на множестве M_1 и M_2 соответственно. Последовательность умножения транспозиций из разных деревьев не важна, так как перестановки, которые переставляют элементы из непересекающихся множеств коммутируют. Далее произведение 2-х циклов на множествах M_1 и M_2 и транспозиции, соединяющей по 1 элементу из этих множеств – это цикл. В самом деле можно занумеровать элементы так, что первый цикл будет $(a_1, \ldots, a_k)$, второй $(b_1, \ldots, b_m)$ и транспозиция (a_1, b_1). Получаем

$$(a_1, b_1) \circ (b_1, \ldots, b_m) \circ (a_1, \ldots, a_k) = (a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m).$$

□

2. Рассмотрим судоку, то есть матрицу 9×9, в которой

- каждая строка содержит (переставленные в некотором порядке) числа $1, 2, \ldots, 9$ (по одному разу каждое).
- каждый столбец содержит (переставленные в некотором порядке) числа $1, 2, \ldots, 9$ (по одному разу каждое).
- если разделить эту матрицу на 9 матриц 3×3, то каждая матрица 3×3 содержит числа $1, 2, \ldots, 9$ (по одному разу каждое).

Докажите, что определитель данной матрицы 9×9 делится на 405.

(Предложил М.Е. Липатов,
см. также https://www.efnet-math.org/w/Solution_May_19,_2008)

Решение. Прибавим все строки к последней. При этом определитель не поменялся. Последняя строка стала состоять из чисел 45. Вынесем это число за определитель, последняя строка состоит из единиц. Прибавим все столбцы к последнему. Последний столбец состоит из чисел 45 и последняя 9. Значит, определитель делится на 9. Исходный определитель в 45 раз больше, то есть делится на 405.

3. Верно ли, что вещественные квадратные матрицы A и B одинакового размера равны тогда и только тогда, когда для любой матрицы X такого же размера из равенства $\det(A+X)=0$ следует равенство $\det(B+X)=0$.

(Предложил А. Э. Гутерман)

Решение. Верно. Скажем, что 2 матрицы A и B находятся в отношении R, если для них выполнено условие, то есть из равенства $\det(A+X)=0$ следует равенство $\det(B+X)=0$. В этом случае говорим, что $R(A,B)=1$, а иначе $R(X,Y)=0$. (Отношение R возможно не симметрично.) Ясно, что $R(A,B)=R(A+C,B+C)$. Возьмём $C=-A$. Тогда $R(A,B)=R(0,B-A)$. Допустим, что ранг $B-A$ равен $k>0$. Рассмотрим базисные строки этой матрицы. Пусть это строки с номерами $j_1,\ldots,j_k$. Дополним их до базиса так, чтобы данные строки стояли в этом базисе на местах $j_1,\ldots,j_k$. Остальные базисные векторы поставим на соответствующие места в строки матрицы D, при этом строки матрицы D с номерами $j_1,\ldots,j_k$ состоят из нулей. Тогда матрица D ранга $n-k$ такая, что $D+B-A$ – невырожденная матрица. Здесь n – размер матриц. Значит, если $B-A\neq 0$, то $R(A,B)=R(0,B-A)=0$. Это доказывает то, что $R(A,B)=1$ тогда и только тогда, когда $A=B$.

4. Дана пара обратимых

а) вещественных

б) комплексных

матриц A и B размера 2023×2023. Всегда ли A и B можно одновременно привести к верхнетреугольному виду элементарными преобразованиями строк и столбцов над соответствующим полем? (*Одновременно* означает, что к двум данным матрицам применяются одинаковые преобразования.)

(Предложил А. М. Максаев)

Решение. Рассмотрим матрицу $M=AB^{-1}$. При одновременных элементарных преобразованиях строк происходит замена $A\to PA$ и $B\to PB$, где P – матрица элементарного преобразования. При одновременных элементарных преобразованиях столбцов происходит замена $A\to AQ$ и $B\to BQ$, где Q – матрица элементарного преобразования. В итоге нескольких одновременных преобразований строк и столбцов происходит замена $A\to CAD$ и $B\to CBD$ для некоторых невырожденных матриц C и D. Тогда $M\to CMC^{-1}$.

а) Пусть изначально у матрицы M было комплексное собственное значение. Например, у матрицы $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ собственные значения i и $-i$. Тогда матрица M не приведётся в вещественном базисе к треугольному виду. Однако, если матрицы $A'=CAD$ и $B'=CBD$ являются верхнетреугольными, то и матрица $M'=CMC^{-1}=A'B'^{-1}$ верхнетреугольная. Получаем противоречие. Следовательно, A и B нельзя одновременно привести к верхнетреугольному виду элементарными преобразованиями строк и столбцов.

б) Приведём матрицу M к Жорданову виду путём сопряжения матрицей C. После этого матрицу CB приведём к треугольному виду элементарными преобразорваниями столбцов. Матрица M при этом не изменится. Для новых матриц A' и B' выполнено, что B' и $M' = A'B'^{-1}$ верхнетреугольные, а значит, и матрица $A = A'B'^{-1}B'$ верхнетреугольная.

5. Через $[G : H]$ мы обозначаем индекс подгруппы H в группе G. Пусть H_1 и H_2 – две подгруппы в группе G. Известно, что $[G : H_1] = [G : H_2] = n$ и $[G : H_1 \cap H_2] = n(n-1)$. Докажите, что подгруппы H_1 и H_2 сопряжены.

(Предложили И. И. Богданов и А. Д. Матушкин)

Решение. Ясно, что $H_1 \cap H_2$ – подгруппа в H_1 и в H_2. Причём

$$[H_1 : H_1 \cap H_2] = [H_2 : H_1 \cap H_2] = n - 1.$$

Рассмотрим множество попарных произведений $S = H_1H_2$. Пусть $s = h_1h_2 \in S$. Тогда $sH_2 = h_1H_2 \subseteq S$. Пусть $s' = h_1'h_2' \in S$. Тогда $s'H_2 = sH_2$ равносильно тому, что $h_1H_2 = h_1'H_2$, то есть $h_1'^{-1}h_1 \in H_2$. Однако $h_1'^{-1}h_1 \in H_1$. Значит, $s'H_2 = sH_2$ равносильно $h_1'^{-1}h_1 \in H_1 \cap H_2$, то есть $h_1(H_1 \cap H_2) = h_1'(H_1 \cap H_2)$. Отсюда следует, что S состоит из $n-1$ левых смежных классов по H_2. Но всего n левых смежных классов по H_2. Значит, $G \setminus S = gH_2$ для любого $g \in G \setminus S$. Аналогично $G \setminus S = H_1g$. То есть $gH_2 = H_1g$, что означает $H_1 = gH_2g^{-1}$.

6. Покажите, что ядро всякого гомоморфизма из конечной группы G в группу из двух элементов содержит не менее половины классов сопряжённости группы G.

(Задача взята отсюда https://mathoverflow.net/q/393934/24165)

Решение. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi\colon G \to (\{\pm 1\}, \cdot)$. Его можно интерпретировать как одномерный комплексный характер группы G. Пусть ψ – характер представления G в групповой алгебре $\mathbb{C}G$ сопряжениями. Легко видеть, что $\psi(g) = |Z(g)|$ – порядок централизатора. В самом деле, матрица данного представления – это матрица перестановки элементов группы с помощью сопряжения элементом g, а её след – количество неподвижных при этой перестановке элементов. Используем, что порядок класса сопряжённости $|C(g)|$ равен $|C(g)| = \frac{|G|}{|Z(g)|}$. Получаем

$$\sum_{g \in G} \frac{1}{|C(g)|}\varphi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |Z(g)|\overline{\varphi(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \psi(g)\overline{\varphi(g)} \geq 0.$$

Последнее неравенство выполнено за счёт того, что левая часть равна кратности вхождения неприводимого представления с характером φ в представление с характеором ψ. Однако сумма

$$\sum_{g \in G} \frac{1}{|C(g)|}\varphi(g)$$

равна количеству смежных классов в ядре минус количество смежных классов не в ядре.

7. Может ли ассоциативное кольцо с единицей содержать ровно пять обратимых элементов?

(Задача взята отсюда https://mathoverflow.net/a/373597/24165)

Решение. Нет. Допустим, что может. Тогда группа обратимых элементов нашего кольца – это $\mathbb{Z}_5$. Если $-1 \neq 1$, то -1 – обратимый элемент порядка 2, что противоречит предыдущему. Значит, $-1 = 1$. Рассмотрим подкольцо, порождённое обратимыми элементами (или, что то же самое, одним неединичным из них). Оно является коммутативным кольцом, которое есть факторкольцом кольца

$$R = \mathbb{F}_2[x]/(x^5 - 1) \cong \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_{16}.$$

Так как в факторкольце 5 обратимых элементов, оно содержит $\mathbb{F}_{16}$. Но в $\mathbb{F}_{16}$ 15 обратимых элементов.

8. Пусть многочлены $f_1, \ldots, f_{100} \in \mathbb{C}[x]$ попарно не пропорциональны. Означает ли это, что для некоторого натурального n многочлены $f_1^n, \ldots, f_{100}^n$ линейно независимы?

(Задача взята отсюда https://mathoverflow.net/q/395657/24165)

Решение.

Докажем, что ответ "да".

Утверждение. *Если два набора $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_k$ элементов некоторого поля таковы, что $\sum a_j^n = \sum b_j^n$ для всех натуральных n, то эти наборы отличаются только перестановкой.*

Доказательство. Известный факт, что через многочлены $x_1^n + \ldots + x_k^n$ выражаются все симметрические многочлены от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Таким образом все симметрические многочлены принимают одинаковые значения на наборах $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_k$. Рассмотрим многочлен $\prod\limits_{i=1}^{k}(x - a_i)$. По теорема Виета его коэффициенты – симметрические многочлены от a_i, а значит, он совпадает с многочленом $\prod\limits_{i=1}^{k}(x - b_i)$. Значит, наборы корней этих многочленов с учётом кратностей совпадают. $\square$

Рассматривая многочлены как элементы поля рациональных чисел, получаем следствие.

Следствие. *Если два набора комплексных многочленов $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_k$ от переменных $x_1, \ldots, x_m$ таковы, что $\sum a_j^n = \sum b_j^n$ для всех натуральных n, то эти наборы отличаются только перестановкой.*

Если многочлены f_j^n линейно зависимы для всех n, то матрицы

$$\begin{pmatrix} \big(f_1(x_1)\big)^n & \ldots & \big(f_1(x_{100})\big)^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \big(f_{100}(x_1)\big)^n & \ldots & \big(f_{100}(x_{100})\big)^n \end{pmatrix}$$

вырождены для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x_j \in \mathbb{C}$. Так как определитель такой матрицы равен нулю для любых значений $x_1, \ldots, x_{100}$, он равен нулю и как многочлен от $x_1, \ldots, x_{100}$. Приравнивая определители этих матриц к нулю, мы получаем, что

$$\sum_{\sigma \in A_{100}} \Big(\prod_{i=1}^{100} f_i(x_{\sigma(i)})\Big)^n = \sum_{\sigma \in S_{100} \setminus A_{100}} \Big(\prod_{i=1}^{100} f_i(x_{\sigma(i)})\Big)^n.$$

В силу следствия это означает, что наборы многочленов $\left\{\prod_{i=1}^{100} f_i(x_{\sigma(i)}) \mid \sigma \in \mathrm{A}_{100}\right\}$ и $\left\{\prod_{i=1}^{100} f_i(x_{\sigma(i)}) \mid \sigma \in \mathrm{S}_{100} \setminus \mathrm{A}_{100}\right\}$ совпадают. В частности $\prod\limits_{i=1}^{100} f_i(x_i) = \prod\limits_{i=1}^{100} f_i(x_{\delta(i)})$ для некоторой нетождественной (и даже нечётной) перестановки δ. Это равенство многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_{100}$. Пусть $\delta(i) = j \neq i$. Тогда единственный множитель в левой части, содержащий x_j – это $f_j(x_j)$, а в правой $f_i(x_j)$. Следовательно, $f_i(x_j) = \lambda f_j(x_j)$. То есть многочлены f_i и f_j пропорциональны.