Программа спецкурса „Элементы алгебраической комбинаторики“

А. Л. Канунников, к. ф.-м. н., мехмат МГУ

1. Принцип включений и исключений. Формула обращения Мёбиуса. Число неприводимых многочленов над конечным полем. Число сюръекций между конечными множествами.

2. Числа Стирлинга первого и второго рода, числа Белла, их комбинаторные интерпретации.

3. q-бином Ньютона, многочлены Гаусса. Число k-мерных подпространств в n-мерном пространстве над конечным полем. Число подгрупп в группе $\mathbb{Z}^n$ простого индекса p.

4. Числа Каталана, эквивалентные определения. Подсчёт методом отражений. Обобщенные числа Каталана (Super Catalan Numbers), их целочисленность и проблема комбинаторной интерпретации.

5. Разбиения и диаграммы Юнга. Биекция Сильвестра между разбиениями на нечётные и на различные слагаемые. Рекуррентные соотношения. Асимптотическая формула Харди–Рамануджана (без доказательства). Примеры в алгебре (классы сопряжённости в группе подстановок, число абелевых групп данного порядка, нильпотентные жордановы формы). Порядки класса сопряжённости и централизатора подстановки.

6. Линейные рекуррентные последовательности. Решение систем линейных рекуррентных уравнений с помощью жордановой формы.

7. Формальные степенные ряды. Метод производящих функций. Примеры: числа сочетаний, числа Фибоначчи, числа Каталана. Число инволюций в группе подстановок. Задача о числе счастливых билетов.

8. Производящая функция для числа разбиений (Формула Эйлера). Пентагональная теорема Эйлера. Тождество Якоби для тройного произведения. Связь с пентагональной теоремой.

9. Комбинаторика орбит: формула орбит и формула Бернсайда для числа орбит. Задачи о числе ожерелий из бусин и числе раскрасок прямоугольника/квадрата с точностью до изометрически эквивалентных.

10. Теория Пойа. Цикловой индекс группы. Подсчёт раскрасок правильных многогранников.

11. Задачи о возможности покрыть данную доску фигурками данного вида.
1) Сведение к принадлежности многочлена идеалу (применение базисов Грёбнера).
2) Сведение к выводу соотношений в группах (применение диаграмм Ван Кампена).

12*. Применение определителей, перманентов, пфаффианов к подсчёту паросочетаний на графах. Теорема Кастеляйна–Темперли–Фишера о числе покрытий доминошками прямоугольной доски.

Примеры теорем и задач

1. Число многочленов степени n со старшим коэффициентом 1, неприводимых над полем $\mathbb{Z}_p$, равно

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)p^d.$$

2. Число строк длины n из нулей и единиц, в которых длина каждого блока из нулей $\geqslant 3$, равно

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\right)+\frac{F_{n+2}}{2},$$

где F_n — числа Фибоначчи (с начальными условиями $F_1 = F_2 = 1$).

3. Сколькими способами можно замостить прямоугольник $2\times n$ единичными квадратиками, доминошками из двух клеток и уголками из трёх клеток?

4. Обозначим через a_n число квадратных корней из тождественной перестановки $e \in S_n$, т. е. $a_n = |\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = e\}|$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = e^{x+\frac{x^2}{2}}.$$

5. Пусть c_n — число самосопряжённых разбиений $\lambda \vdash n$, т. е. таких, что диаграмма Юнга для λ совпадает со своей транспонированной. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1+x)(1+x^3)(1+x^5)\ldots$$

6*. Любую нечётную перестановку из S_n при $n \geqslant 2$ можно представить в виде произведения цикла длины n и цикла длины $n-1$ ровно $2(n-2)!$ способами.

7. Докажите, что $(n^2)!$ кратно $(n!)^{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

8. *Super Catalan Numbers* — это числа

$$\frac{(2m)!(2n)!}{(m+n)!m!n!}.$$

а) Докажите, что эти числа целые при всех $m, n \in \mathbb{N}$.
б)* Найдите комбинаторный смысл этих чисел.

9. Найдите число подгрупп простого индекса p в группе $\mathbb{Z}^n$.

10. *q-аналог $n!$.* Пусть $\mathrm{inv}(\sigma)$ — число инверсий в перестановке $\sigma \in S_n$. Тогда

$$\sum_{\sigma \in S_n} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} = (1+q)(1+q+q^2)\ldots(1+q+\ldots+q^{n-1}).$$

11. *Многочлены Гаусса.* Число k-мерных подпространств n-мерного пространства над полем порядка q равно

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\ldots(q^k-q^{k-1})}.$$

12. Число перестановок в S_n с цикловым строением $\lambda = [1^{m_1}2^{m_2}\ldots] \vdash n$ (m_i циклов длины i для всех i) равно $n!/z_\lambda$, где

$$z_\lambda = \prod_i i^{m_i} m_i!$$

— порядок централизатора любой такой перестановки.

13. *Теорема Эйлера.* Производящая функция для количества $p(n)$ разбиений числа n равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

14. *Одна из форм пентагональной теоремы Эйлера.*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}}\right) = 1.$$

15. Количества разбиений числа n на нечётные слагаемые и на различные слагаемые совпадают.
а) Вычисление производящих функций; б) построение биекции Сильвестра.

16. Сколькими способами можно покрасить вершины правильного 15-угольника в 3 три цвета, чтобы в каждый цвет было покрашено пять вершин? Раскраски, считаются эквивалентными, если одна получается из другой: а) поворотом; б) поворотом или отражением.

17. Сколькими способами можно раскрасить а) грани; б) вершины; в) рёбра куба в три цвета? (Раскраски считаются эквивалентными, если одна получается из другой вращением.)

18. Сколькими способами можно расставить на гранях куба натуральные числа, в сумме дающие n? (Расстановки считаются эквивалентными, если одна получается из другой вращением.)

19. а) Докажите, что прямоугольники $3 \times (2n+1)$, 5×5, 5×7 нельзя покрыть равномерно в несколько слоёв уголками из трёх клеток.

б)* Докажите, что если прямоугольник $m \times n$ нельзя равномерно покрыть в несколько слоёв фигурками F, то это всегда можно доказать, расставив в клетки числа так, чтобы сумма по всем клеткам была положительна, а сумма в каждой фигурке — отрицательной.

20. *Теорема Кастеляйна–Темперли–Фишера.* Число способов покрыть доску $2m \times 2n$ доминошками равно

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} 4\left(\cos^2\frac{\pi i}{2m+1} + \cos^2\frac{\pi j}{2n+1}\right).$$