УДК 512.715 + 512.66

Модули нулевой горенштейновой размерности над алгебрами графов.

Е. С. Голод, Г. А. Погудин

Показывается, что несвободные модули нулевой горенштейновой размерности над алгеброй графа существуют в том и только том случае, если граф — дерево. В этом случае дается классификация таких модулей.

1 Введение

Мы рассматриваем нётеровы локальные коммутативные кольца, которые для упрощения ситуации будут предполагаться локальными алгебрами, то есть содержащими поле вычетов. Все рассматриваемые модули предполагаются конечно порожденными. Для локальных алгебр, представляющих гиперповерхностные особенности или, более общо, полные пересечения, в ряде работ исследовался вопрос о классификации таких алгебр, имеющих конечный коэн-маколеев тип представления, то есть конечное число классов изоморфизма неразложимых максимальных модулей Коэна-Маколея (см. [1]).

Для горенштейновых локальных колец класс максимальных модулей Коэна-Маколея совпадает с классом модулей нулевой горенштейновой размерности (называемых также вполне рефлексивными ([2, 3]); в другой терминологии — горенштейново проективные модули, — понятие, которое определено и изучается над произвольными ассоциативными кольцами).

Определение 1. Модуль M над кольцом R имеет *нулевую горенштейнову размерность*, если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Естественный гомоморфизм $M \to M^{**}$ биективен (здесь $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ — сопряженный модуль);

2. $\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = 0$ и $\mathrm{Ext}^i_R(M^*, R) = 0$ для всех $i > 0$.

Определение 2. Модуль M надо кольцом R называется *горенштейново проективным*, если существует бесконечный в обе стороны ациклический комплекс проективных модулей $\ldots \to P_i \xrightarrow{\varphi_i} P_{i-1} \to \ldots$ такой, что для некоторого i имеет место изоморфизм $M \cong \mathrm{Ker}\,\varphi_i$, и для всякого проективного модуля P комплекс $\ldots \leftarrow \mathrm{Hom}(P_i, P) \leftarrow \mathrm{Hom}(P_{i-1}, P) \leftarrow \ldots$ также ацикличен.

В случае конечно порожденных модулей над нётеровым кольцом эти определения эквивалентны (см. [4, теорема 4.2.6]).

Определение 3. Будем говорить, что модуль M над кольцом R имеет *горенштейнову размерность не больше n* (сокращенно будем называть её G-размерностью), если существует точная последовательность $0 \to G_n \to \ldots \to G_0 \to M \to 0$, где G_i — модули горенштейновой размерности нуль.

Если такой последовательности не существует ни для какого n, то будем говорить, что модуль имеет бесконечную горенштейнову размерность.

G-размерность, если она конечна, не превосходит глубины локального кольца. Поскольку в данной работе речь будет идти о нульмерных локальных кольцах, мы будет говорить только о модулях G-размерности нуль.

Модули нулевой горенштейновой размерности над произвольным кольцом Коэна-Маколея являются максимальными модулями Коэна-Маколея, но над негоренштейновыми кольцами Коэна-Маколея первый класс строго уже второго, и поэтому естественно рассматривать вопрос о конечности множества классов изоморфизма неразложимых модулей нулевой горенштейновой размерности над негоренштейновыми локальными кольцами.

Однако в работе Ёсино [5] для некоторых негоренштейновых артиновых колец и, более общо, в работах Такахаси ([6], [7], [8]) для негоренштейновых гензелевых колец глубны не больше двух было показано, что над такими кольцами множество классов изоморфизма неразложимых модулей нулевой горенштейновой размерности конечно, только если всякий такой модуль свободен. Дальнешие результаты этого типа были получены в [2], [3].

В связи с этим представляет интерес вопрос о существовании несвободных модулей нулевой горенштейновой размерности для каких-либо классов негоренштейновых локальных колец. Этот вопрос был подвергнут детальному изучению в упомянутой выше работе Ёсино [5] для простейшего класса локальных колец — с нулевым кубом максимального идеала (там же показано, что для колец с нулевым квадратом максимального идеала таких модулей не существует). В этой работе были получены весьма нетривиальные условия, которым должна удовлетворять такая алгебра R, если над ней существует несвободный модуль нулевой G-размерности (эти условия с некоторыми дополнительными обсуждениями собраны в разделе 2). Также в работе Ёсино показано, что эти условия являются достаточными для существования несвободного R-модуля нулевой G-размерности, если R обладает нетривиальной деформацией, то есть представляется в виде $R = S/fS$, где $(S, \mathfrak{n})$ — одномерная локальная алгебра Коэна-Маколея минимальной кратности (существует неделитель нуля $x \in \mathfrak{n}$, для которого $\mathfrak{n}^2 = x\mathfrak{n}$), и $f \in \mathfrak{n}^2$ — неделитель нуля. В работе Велике [9] приведен пример модуля нулевой G-размерности над алгеброй с нулевым кубом максимального идеала, не имеющей нетривиальных деформаций.

Материал в статье организован следующим образом. В разделе 2 обсуждаются некоторые необходимые условия существования несвободных модулей нулевой горенштейновой размерности над локальными алгебрами с $\mathfrak{m}^3 = 0$. В разделе 3 обсуждаются циклические модули над такими алгебрами. В разделе 4 доказывается критерий изоморфизма модулей нулевой горенштейновой размерности над такими алгебрами. В разделах 5, 6 и 7 изучаются и классифицируются модули нулевой горенштейновой размерности над алгебрами деревьев. В разделе 8 показывается, что большинство алгебр деревьев не имеет нетривиальных деформаций. Более того, над ними, так же, как и в примере Велике, не существует несвободных модулей конечной CI-размерности.

2 Необходимые условия существования несвободных модулей нулевой горенштейновой размерности над локальной алгеброй с нулевым кубом максимального идеала.

Пусть $(R, \mathfrak{m})$ — локальная алгебра над полем $k = R/\mathfrak{m}$ с $\mathfrak{m}^2 \neq 0$ и $\mathfrak{m}^3 = 0$. На такой алгебре (см. [5]) можно ввести структуру градуированного кольца $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2$, где $R_0 = k$ и $R_2 = \mathfrak{m}^2$. Если M — модуль нулевой G-размерности, не имеющий свободных прямых слагаемых, то $\mathfrak{m}^2 M = 0$ и на M можно ввести структуру градуированного R-модуля $M = M_0 \oplus M_1$, где $M_1 = \mathfrak{m}M$.

Рассмотрение модулей нулевой горенштейновой размерности как градуированных объектов не влияет на такие их свойства, как изоморфизм и разложимость в прямую сумму, как показывает следующее предложение (наверняка известное, но мы не нашли подходящей ссылки):

Предложение 1. *Пусть* $M = \bigoplus_{i\geqslant 0} M_i$ *и* $N = \bigoplus_{i\geqslant 0} N_i$ *— градуированные модули, порожденные пространствами* M_0 *и* N_0 *соответственно. Если* M *и* N *изоморфны как неградуированные модули, то они также изоморфны как градуированные модули. Если* M *разлагается в прямую сумму двух ненулевых подмодулей, то* M *разлагается в прямую сумму двух ненулевых однородных подмодулей.*

Доказательство. Так как M порождается элементами степени нуль, то всякий гомоморфизм $f\colon M \to N$ единственным образом разлагается в сумму $f = f_0 + f_1$, где f_0 — гомоморфизм степени ноль, а f_1 отображает M_i в $N_{i+1} \oplus N_{i+2} \oplus \ldots$. При этом для композиции гомоморфизмов $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ выполнено $(g \circ f)_0 = g_0 \circ f_0$. Поэтому если $f\colon M \to N$ и $g\colon N \to M$ взаимно обратные изоморфизмы, то $g_0 \circ f_0 = \mathrm{id}_M$ и $f_0 \circ g_0 = \mathrm{id}_N$, то есть f_0 и g_0 — взаимно обратные однородные изоморфизмы.

Если $p\colon M \to M$ — идемпотентный гомоморфизм, то $p_0^2 = p_0$, причем из $p_0 = 0$ следует $p = 0$, так как p_1 не может быть ненулевым идемпотентом. $\square$

Пусть $r = \dim_k(0\colon {}_R\mathfrak{m})$ — размерность цоколя R. Если R негоренштейново, то $r > 1$. В работе Ёсино [5] доказана

Теорема 1. *([5][теорема 3.1]) Если* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *— негоренштейнова локальная алгебра с* $\mathfrak{m}^3 = 0$*, и над ней существует несвободный модуль нулевой* G*-размерности, то она удовлетворяет следующим условиям:*

1. $(0 :_R \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}^2$;

2. $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_k R_1 = r + 1$;

3. *R как градуированная алгебра козюлева, то есть R-модуль k имеет минимальную свободную резольвенту:*

$$\ldots \longrightarrow R^{b_i} \xrightarrow{d_i} R^{b_{i-1}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow R_0 \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

   , в которой все отображения d_i задаются матрицами из элементов R_1 (линейная резольвента) и, в частности, определяющие соотношения алгебры R являются квадратичными формами;

4. *ряд Басса* $B_R(t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \mu_i t^i$*, где* $\mu_i = \dim_k \mathrm{Ext}^i_R(k, R)$*, имеет вид* $B_R(t) = \frac{r-t}{1-rt}$*;*

5. *если M — R-модуль нулевой G-размерности, не содержащий свободных прямых слагаемых, и $b = \dim_k M/\mathfrak{m}M$, то $0 :_M \mathfrak{m} = \mathfrak{m}M$, $\dim_k \mathfrak{m}M = rb$, $\dim_k M^*/\mathfrak{m}M^* = b$ и M имеет линейную минимальную свободную резольвенту вида*

$$\ldots R^b \xrightarrow{d_3} R^b \xrightarrow{d_2} \ldots \xrightarrow{d_1} R^b \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

   причем для всякого $i \geqslant 1$ выполнено $\mathrm{Im} d_i \supset \mathfrak{m}^2 R^b$.

Замечание 1. Если $(R, \mathfrak{m})$ — артинова локальная алгебра, над которой существует несвободный модуль нулевой G-размерности, то для неё выполнено условие:

$(1')$ $\mathfrak{m}$ не разлагается в прямую сумму ненулевых идеалов.

Доказательство. Действительно, если $\mathfrak{m} = I \oplus J$ и M — неразложимый несвободный R-модуль нулевой горенштейновой размерности, то $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R) = \mathrm{Hom}_R(M, \mathfrak{m}) = \mathrm{Hom}_R(M, I) \oplus \mathrm{Hom}_R(M, J)$. Поскольку I и J имеют ненулевые цоколи, то оба слагаемых в этом разложении ненулевые, и из $M \cong M^{**}$ следует противоречие с неразложимостью M. $\square$

Определение 4. Алгебру, удовлетворяющую условиям теоремы и условию $1'$ будем называть *алгеброй Ёсино.*

Условие (1) в формулировке теоремы следует из ($1'$), так как если $(0\colon {}_R\mathfrak{m}) \not\subseteq \mathfrak{m}^2$, то $\mathfrak{m}$ имеет ненулевое слагаемое, изморфное k (порожденное любым элементом из $(0\colon {}_R\mathfrak{m})\backslash\mathfrak{m}^2$). Из этого следует, что если R не обязательно артиново, но негоренштейново, и над ним существует несвободный модуль нулевой горенштейновой размерности, то R удовлетворяет условию (1). Из тех же соображений видно, что если M — модуль нулевой горенштейновой размерности над негоренштейновым кольцом, то $(0\colon {}_M\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}M$.

Из утверждения (4) теоремы Ёсино следует, в частности, что всякий модуль M нулевой G-размерности над алгеброй Ёсино R с минимальным набором из b порождающих изоморфен образу минимального (т.е. $\operatorname{Ker}\varphi \subset \mathfrak{m}R^b$) однородного степени 1 гомоморфизма $R^b \xrightarrow{\varphi} R^b$, удовлетворяющего условию $\dim(\operatorname{Ker}\varphi)_1 = b$ (где $(\operatorname{Ker}\varphi)_1$ — однородная компонента $\operatorname{Ker}\varphi$ степени 1) и $(\mathrm{Im}\varphi)_2 = R^b_2$. Заметим, что для любого минимального однородного гомоморфизма степени один: $\dim_k(\operatorname{Ker}\varphi)_1 \geqslant b$ и $(\mathrm{Im}\varphi)_2 \subseteq R^b_2$, то есть указанные условия эквивалентны, поскольку в алгебре Ёсино выполнено $\dim_k R^b_1 - \dim_k R^b_2 = b$. Используя это замечание, получаем:

Лемма 1. *Пусть R — алгебра Ёсино, и комплекс $F\colon R^b \xrightarrow{\varphi_n} R^b \to \ldots \to R^b \xrightarrow{\varphi_1} R^b$ таков, что все φ_i — минимальные гомоморфизмы степени один. Если F ацикличен (то есть $H_i(F) = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$), то $\dim_k(\operatorname{Ker}\varphi_i)_1 = b$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Если $\dim_k(\operatorname{Ker}\varphi_i)_1 = b$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, то F ацикличен.*

Доказательство. Так как $\dim_k(\mathrm{Im}\varphi_i)_1 = b$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, то если F ацикличен, то $\dim_k(\operatorname{Ker}\varphi_i)_1 = b$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Обратно, пусть $\dim_k(\operatorname{Ker}\varphi_i)_1 = b$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $(\operatorname{Ker}\varphi_{i-1})_1 = (\mathrm{Im}\varphi_i)_1$ и $(\mathrm{Im}\varphi_i)_2 = R^b_2$ при $2 \leqslant i \leqslant n$. Так как $(\operatorname{Ker}\varphi_i)_2 \subseteq R^b_2$, то $(\operatorname{Ker}\varphi_{i-1})_2 = (\mathrm{Im}\varphi_i)_2$ при $2 \leqslant i \leqslant n$. □

Сформулируем нужное нам в дальнейшем предложение, которое в случае $M = k$ доказано в [10, теорема 2.11.1], и приведем его простое доказательство для произвольного модуля M. Пусть $R = k \oplus R_1 \oplus \ldots$ — стандартная градуированная алгебра, а $M = \bigoplus_{i\geqslant 0} M_i$ — конечнопорожденный градуированный R-модуль. Обозначим $h_i(M) = \dim_k M$ размерности градуированных компонент и через $H_M(t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} h_i(M)t^i$ его ряд Гильберта. Пусть $F\colon \ldots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ — минимальная свободная резольвента M, где $F_i = \bigoplus_{j\geqslant i} R(-j)^{b_{ij}}$. Неотрицательные целые числа b_{ij} называются градуированными числами Бетти модуля M, числа $b_i = \sum\limits_{j\geqslant i} b_{ij}$ называются числами Бетти. Через $P_M(t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ обозначим ряд Пуанкаре для M. Говорят, что модуль M имеет линейную резольвенту, если $b_{ij} = 0$ при $j > i$. Тогда верно следующее утверждение:

Предложение 2. *Если выполнено соотношение $H_M(t) = H_R(t)P_M(-t)$, то M имеет линейную резольвенту.*

Доказательство. Если выполняется данное соотношение, то для всех $i \geqslant 0$ выполнено рекуррентное соотношение $h_i(M) = \sum_{k=0}^{i}(-1)^k h_{i-k}(R)b_k$. Пусть резольвента для модуля M не является линейной и i наименьший индекс, где линейность нарушается, то есть $b_{kj} = 0$ при $j > k$ и $i > k$, но $b_{ij} \neq 0$ для некоторого $j > i$. Для этого i помимо выписанного рекуррентного соотношения должно выполняться также соотношение $h_i(M) = (-1)^i b_{ii} + \sum\limits_{k=0}^{i-1}(-1)^k h_{i-k}(R)b_k$, следующее из точности градуированного комплекса. Так как $b_i \neq b_{ii}$, эти равенства не могут выполняться одновременно. □

Замечание 2. Пусть $R = \bigoplus_{i=0}^{s} R_i$ — артинова градуированная локальная алгебра над полем k, $R_0 = k$, $R_s \neq (0)$. Тогда инъективная оболочка поля вычетов $E(k)$ может быть наделена градуировкой $E(k) = \bigoplus_{i=0}^{s} E_i$, где $E_0 \neq 0$ и $\dim_k E_s = 1$, и ряд Басса $B_R(t)$ совпадает с рядом Пуанкаре $P_{E(k)}(t)$. В условиях теоремы Ёсино вид ряда Басса $B_R(t)$ показывает, что $H_R(t)P_{E(k)}(-t) = H_{E(k)}(t)$, где через H обозначен соответствующий ряд Гильберта. Отсюда в силу предложения 2 следует, что градуированный R-модуль $E(k)$ имеет линейную свободную резольвенту.

Кроме того, в условиях теоремы Ёсино первый модуль сизигий для $E(k)$, также имеющий после сдвига градуировки линейную резольвенту, имеет только две ненулевые однородные компоненты. Если над градуированной алгеброй R существует градуированный модуль $M = M_1 \oplus M_2$, имеющий линейную резольвенту, то алгебра R козюлева. Доказательство этого утверждения по существу идентично доказательству козюлевости алгебры в теореме Ёсино, где в качестве M используется модуль нулевой G-размерности, не имеющий свободных прямых слагаемых. Таким образом, условие (4) в теореме 1 следует из условия (3) и непосредственно не требует наличия несвободного модуля нулевой горенштейновой размерности.

Замечание 3. Приведенное выше условие $(1')$ также следует из условия (3). Более того, имеет место следующее утверждение:

Пусть цоколь градуированной алгебры $R = \bigoplus_{i=0}^{s} R_i$ ($s \geqslant 2$), порожденной R_1, совпадает с R_s (тогда $E(k)$ порождается в степени 0). Если максимальный однородный идеал R_+ разлагается в прямую сумму двух ненулевых однородных идеалов $R_+ = R'_+ \oplus R''_+$, то модуль $E(k)$ не является линейно представимым (то есть его первый модуль сизигий не порождается линейными соотношениями) и, следовательно, не имеет линейной резольвенты.

Доказательство. Разложимость в прямую сумму максимального идеала в R равносильна разложимости подмодуля $E(k)/\varepsilon$, где ε — одномерный цоколь $E(k)$. Согласно предложению 1 модуль $E(k)/\varepsilon$ разлагается в прямую сумму однородных подмодулей $\bar{M} = M_0 \oplus M_1$ и $\bar{N} = N_0 \oplus N_1$. Если $f_1, \ldots, f_p$ и $g_1, \ldots, g_q$ — базисы в M_0 и N_0, то $\{f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q\}$ можно отождествить с минимальной системой порождающих в $E(k)$. Так как $M_1 \cap N_1 = 0$, то все линейные соотношения между ними порождаются линейными соотношениями между $f_1, \ldots, f_p$ и $g_1, \ldots, g_q$. Подмодули $M = \langle f_1, \ldots, f_p \rangle$ и $N = \langle g_1, \ldots, g_q \rangle$ в $E(k)$ содержат ε, а поэтому имеется соотношение степени 2 вида $(a_1 f_1 + \ldots + a_p f_p) + (b_1 g_1 + \ldots + b_q g_q) = 0$, где $a_i, b_j \in R_2$, и заключенные в скобки слагаемые не равны нулю. Однако, в любом соотношении порожденном линейными, такого вида слагаемые обязаны обращаться в нуль. □

Замечание 4. Пусть R — локальное кольцо, и $\operatorname{depth} R = 0$. Если $M \to M^{**}$ инъективно, и модуль M^* рефлексивен, то M рефлексивен. Действительно, пусть $M \xrightarrow{\varphi} M^{**} \to N \to 0$, тогда $0 \to N^* \to M^{***} \xrightarrow{\varphi^*} M^*$. Но φ^* — биекция, а значит $N^* = 0$. Так как R имеет цоколь, $N = 0$.

Покажем теперь, что из $\operatorname{G-dim} M^* = 0$ следует, что $\operatorname{G-dim} M = 0$. Пусть $\varphi\colon M \to M^{**}$. Обозначим $\operatorname{Im}\varphi$ через $\overline{M}$. $\overline{M}^* = M^*$, а значит, согласно предыдущему, $\operatorname{G-dim} \overline{M} = 0$. Пусть $N = \operatorname{Ker}\varphi$, тогда $0 \to N \to M \to \overline{M} \to 0$, откуда $0 \to \overline{M}^* \to M^* \to N^* \to \operatorname{Ext}^1_R(\overline{M}, R)$. Так как $\operatorname{Ext}^1_R(\overline{M}, R) = 0$, и гомоморфизм между $\overline{M}^*$ и M^* является биекцией, $N^* = 0$, а значит и $N = 0$.

Без предположения $\operatorname{depth} R = 0$ это, вообще говоря, неверно. Пусть $M = (x, y) \subset k[x, y]_{(x,y)} = R$. Тогда $M^* \cong R$, но M не рефлексивен.

3 Циклические модули нулевой G-размерности над локальной алгеброй с $\mathfrak{m}^3 = 0$.

Предложение 3. *Пусть $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2$ — стандартная градуированная алгебра с $\dim_k R_2 = \dim_k R_1 - 1 = r$. Над R существует несвободный циклический модуль нулевой G-размерности в* *том и только в том случае, если существуют такие элементы $p, q \in R_1$, что* $\operatorname{Ann}_R p = (q)$ *и* $\operatorname{Ann}_R q = (p)$.

Доказательство. Пусть $M = R/I$ — модуль нулевой G-размерности, $I \neq 0$. Так как $\mathfrak{m}^2 M = 0$, то $\mathfrak{m}^2 R = R_2 \subseteq I$. Согласно Ёсино, $\mathfrak{m}M = \mathfrak{m}/I$ имеет размерность r. Следовательно, $\dim_k I/\mathfrak{m}^2 = 1$. Так как I также имеет нулевую G-размерность и $\operatorname{socle} I = \mathfrak{m}^2$, то $\mathfrak{m}I = \mathfrak{m}^2$ и I является циклическим, то есть $I = (p)$ и $\dim_k I = r+1$. Пусть $J = \operatorname{Ann}_R p = \operatorname{Ann}_R I$. Тогда $M^* \cong J$ — модуль нулевой G-размерности, $\operatorname{socle} J = \mathfrak{m}^2$. Согласно Ёсино, так как $\dim_k \mathfrak{m}^2 = \dim_k \mathfrak{m}J = r$, то $\dim_k J/\mathfrak{m}J = 1$, $J = (q)$ и $\dim_k J = r + 1$. Модуль R/J имеет нулевую G-размерность, а значит $I \subseteq \operatorname{Ann}_R J$ и $\dim_k \operatorname{Ann}_R J = r + 1$, то есть $I = \operatorname{Ann}_R J$.

Пусть наоборот, существуют такие p и q. Несвободность модулей $R/(p)$ и $R/(q)$ очевидна. Заметим, что из-за условия на аннуляторы следует, что ядром умножения на p как отображения $R \to R$ является в точности (q). Отсюда следует, что $(R/(p))^* \cong (q) \cong R/(p)$. Это соотношение сразу даёт нам первую часть определения модулей нулевой G-размерности.

Также мы можем построить резольвенту $\ldots \xrightarrow{q} R \xrightarrow{p} R \longrightarrow R/(p) \longrightarrow 0$, которая при сопряжении перейдет в $0 \longrightarrow (q) \longrightarrow R \xrightarrow{p} R \xrightarrow{q} \ldots$, то есть $\operatorname{Ext}^i_R(R/(p), R) = 0$ при $i \geqslant 1$. Все эти комплексы ацикличны, что и дает нам второе свойство модулей нулевой G-размерности. $\square$

4 Изоморфизм подмодулей.

Лемма 2. *Пусть R — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, F — свободный R-модуль ранга n, и $\varphi\colon F \to M$ — сюръективный гомоморфизм R-модулей. Если элементы $a_1, \ldots, a_n$ порождают M, то существует базис $e_1, \ldots, e_n$ свободного модуля F такой, что $\varphi(e_i) = a_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда R — поле. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ образуют базис R-векторного пространства M, и $a_j = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_{ji} a_i$ для всех $j > k$. Выберем $e_1, \ldots, e_k$ так, чтобы $\varphi(e_i) = a_i$, и пусть $e'_{k+1}, \ldots, e'_n$ — некоторый базис $\operatorname{Ker} \varphi$. Положим для всякого $j > k$ $e_j = e'_j + \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_{ji} e_i$. Тогда $e_1, \ldots, e_n$ — искомый базис для F.

Пусть теперь R — произвольное локальное кольцо, $\bar{\varphi}\colon F/\mathfrak{m}F \to M/\mathfrak{m}M$ — индуцированный гомоморфизм, и $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ — образы $a_1, \ldots, a_n$ в $M/\mathfrak{m}M$. По предыдущему, найдется базис $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ в $F/\mathfrak{m}F$, для которого $\bar{\varphi}(\bar{e}_i) = \bar{a}_i$. Для базиса $e'_1, \ldots, e'_n$, составленного из некоторых представителей классов $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$, имеем $\varphi(e'_i) - a_i \in \mathfrak{m}M$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Так как φ отображает $\mathfrak{m}F$ сюръективно на $\mathfrak{m}M$, то можно выбрать такие $u_i \in \mathfrak{m}F$, что $\varphi(u_i) = \varphi(e'_i) - a_i$. Тогда положим $e_i = e'_i - u_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Это и будет искомым базисом в F. $\square$

Лемма 3. *Пусть R — либо стандартная градуированная алгебра над полем k, либо локальная алгебра с полем вычетов k, а $\mathfrak{m}$ — максимальный однородный или максимальный идеал соответственно. Пусть заданы гомоморфизмы (в градуированном случае однородные некоторых степеней) конечно порожденных свободных R-модулей $F_2 \underset{\psi_2}{\overset{\varphi_2}{\rightrightarrows}} F_1 \underset{\psi_1}{\overset{\varphi_1}{\rightrightarrows}} F_0$ такие, что $\operatorname{Ext}^1_R(\operatorname{Coker} \psi_1, R) = \operatorname{Ext}^1_R(\operatorname{Coker} \varphi_1, R) = 0$.*

Тогда $\operatorname{Im}\varphi_1 \cong \operatorname{Im}\psi_1$ в том и только в том случае, когда существуют автоморфизмы $\alpha\colon F_0 \to F_0$ и $\beta\colon F_1 \to F_1$ такие, что $\psi_1 = \alpha\varphi_1\beta$.

Доказательство. Заметим, что комплексы $F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \to \operatorname{Coker} \varphi_1$ и $F_2 \xrightarrow{\psi_2} F_1 \xrightarrow{\psi_1} F_0 \to \operatorname{Coker} \psi_1$ можно рассматривать как начальные отрезки свободных резольвент для $\operatorname{Coker} \varphi_1$ и $\operatorname{Coker} \psi_1$

соответственно. Условие $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Coker}\,\varphi_1, R) = \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Coker}\,\psi_1, R) = 0$ равносильно тому, что сопряженные комплексы точны в члене F_1^*, а значит и просто точны.

Если $\psi_1 = \alpha\varphi_1\beta$, то α изоморфно отображает $\mathrm{Im}\varphi_1$ на $\mathrm{Im}\psi_1$.

Обратно, пусть $f\colon \mathrm{Im}\varphi_1 \to \mathrm{Im}\psi_1$ — изоморфизм, в силу предложения 1 в градуированном случае его можно считать однородным. Обозначим $r_i = \mathrm{rank}\, F_i$ для $i = 0, 1, 2$. Выберем в $\mathrm{Im}\varphi_1$ систему образующих $a_1, \ldots, a_{r_1}$. Согласно предыдущей лемме, в F_1 найдутся такие базисы $e_1^1, \ldots, e_{r_1}^1$ и $e_1^2, \ldots, e_{r_1}^2$, что $\varphi_1(e_i^1) = a_i$ и $\psi_1(e_i^2) = f(a_i)$. Тогда автоморфизм $\tilde{\beta}\colon F_1 \to F_1$, заданный формулой $\tilde{\beta}(e_i^2) = e_i^1$, удовлетворяет равенству $f \circ \varphi_1 \circ \tilde{\beta} = \psi_1$.

Тогда $\mathrm{Ker}(\varphi_1 \circ \tilde{\beta}) = \mathrm{Ker}\,\psi_1$, а значит $\tilde{\beta}$ определяет изоморфизм $\mathrm{Ker}\,\varphi_1$ с $\mathrm{Ker}\,\psi_1$, а значит в силу точности, и $\mathrm{Im}\varphi_2$ с $\mathrm{Im}\psi_2$. Как и выше, существует автоморфизм $\gamma\colon F_2 \to F_2$ такой, что $\tilde{\beta}\circ\psi_2\circ\gamma = \varphi_2$

Переходим к сопряженным отображениям. Так как $\tilde{\gamma}^*$ — изоморфизм, образы φ_2^* и ψ_2^* изоморфны. Аналогично предыдущему, существуют автоморфизмы α^* и β^* для F_0^* и F_1^* такие, что $\psi_1^* = \beta^* \circ \varphi_1^* \circ \alpha^*$. Переходя к сопряженным отображениям, получаем требуемое. □

Следствие 1. *В условиях леммы 3 в градуированном случае отображения φ_1 и ψ_1 имеют одну и ту же степень.*

Следствие 2. *Пусть $\mathrm{depth}\, R = 0$ и A_1 и A_2 — две матрицы над R размера $b \times t$ с однородными элементами одной степени в градуированном случае. Пусть подмодули нулевой G-размерности M_1 и M_2 в R^b порождаются столбцами A_1 и A_2 соответственно. Тогда $M_1 \cong M_2$, если и только если существуют обратимые $b \times b$ и $t \times t$ матрицы U и V такие, что $A_2 = UA_1V$.*

Доказательство. Действительно, пусть M_1 и M_2 изоморфны. Рассмотрим гомоморфизмы φ_1 и ψ_1 из R^t в R^b, задаваемые матрицами A_1 и A_2. Так как $\mathrm{Im}\varphi_1 \cong \mathrm{Im}\psi_1$, имеет место изоморфизм $\mathrm{Ker}\,\varphi_1 \cong \mathrm{Ker}\,\psi_1$. Пусть $R^s \xrightarrow{\varphi_2} \mathrm{Ker}\,\varphi_1$ и $R^s \xrightarrow{\psi_2} \mathrm{Ker}\,\psi_1$ определяются минимальными системами порождающих в $\mathrm{Ker}\,\varphi_1$ и $\mathrm{Ker}\,\psi_1$. Так как M_i имеют нулевую G-размерность, то модули $N_i = R^b/M_i$ имеют нулевую G-размерность, откуда $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Coker}\,\varphi_1, R) = \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Coker}\,\psi_1, R) = 0$. Таким образом, мы попали в условия леммы 3. Искомые матрицы U и V будут матрицами полученных автоморфизмов α и β. □

5 Модули нулевой G-размерности над алгебрами графов.

Теперь рассмотрим некоторый класс алгебр, для которых будут описаны все модули нулевой G-размерности. Фиксируем основное поле k. Рассмотрим граф G на n вершинах, занумерованных числами от 1 до n. То, что ребро между вершинами i и j принадлежит графу G, будем записывать как $(i, j) \in G$.

Определение 5. Определим *алгебру графа G* следующим образом:

$$A_k(G) = k[x_1, \ldots, x_n]/\left(x_1^2, \ldots, x_n^2, x_ix_j|(i,j) \notin G\right) \cong k \oplus \langle x_1, \ldots, x_n\rangle \oplus \langle x_ix_j|(i,j) \in G\rangle$$

Особый интерес для нас будет представлять случай, когда G — дерево.

Лемма 4. *Пусть G — граф на n вершинах. Если алгебра $A_k(G)$ является алгеброй Ёсино, то G — дерево.*

Доказательство. Пусть граф G несвязен, то есть представим в виде объединения $G_0 \cup G_1$ своих подграфов G_0 и G_1. Тогда максимальный идеал $A_k(G)$ раскладывается в прямую сумму идеалов порожденных переменными, соответствующими вершинам G_0 и G_1. Если в G больше $n-1$ ребра, то $A_k(G)$ не удовлетворяет условию (2) теоремы 1. Таким образом, G является деревом. □

Звездой будем называть дерево, в котором существует вершина, соединенная со всеми остальными.

Далее фиксируем дерево T с $n > 1$ и будем обозначать $A_k(T)$ через R. От алгебры многочленов алгебра R наследует естественную градуировку $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2$, где $R_1 = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Для любого элемента $p \in R_1$ через p_α будем обозначать коэффициент при x_α в p.

Покрасим все вершины дерева в два цвета правильным образом. Через T_0 и T_1 будем обозначать множества вершин нулевого и первого цветов соответственно. Для $p \in R_1$ положим $\tilde{p} = \sum\limits_{\alpha \in T_0} p_\alpha x_\alpha - \sum\limits_{\beta \in T_1} p_\beta x_\beta$.

Лемма 5. *Для любого $p \in R_1$ выполнено $p\tilde{p} = 0$. При этом $\operatorname{Ann}_{R_1} p = \langle \tilde{p} \rangle$ в том и только в том случае, когда коэффициент p_α для всякой внутренней вершины α отличен от нуля.*

Доказательство. Пусть $q \in R_1$ таково, что $pq = 0$. Рассмотрим $(\alpha, \beta) \in T$, причем $\alpha \in T_0$ и $\beta \in T_1$. Коэффициент при $x_\alpha x_\beta$ в произведении pq равен $p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha = 0$. Это означает, что вектора $(p_\alpha, -p_\beta)$ и (q_α, q_β) пропорциональны. Если для каждой внутренней вершины α число p_α отлично от нуля, то коэффициенты пропорциональности на инцидентных ребрах равны. В силу связности дерева, равны коэффициенты пропорциональности на всех ребрах, то есть q пропорционально $\tilde{p}$.

Обратно, пусть α — внутренняя вершина, для которой $p_\alpha = 0$. Рассмотрим представление $T = S_1 \cup S_2$, где S_1 и S_2 — поддеревья, и $S_1 \cap S_2 = \{\alpha\}$. Так как α внутренняя, можно считать, что в каждом из S_1 и S_2 больше одной вершины. Пусть p^1 и p^2 — ограничения p на S_1 и S_2 соответственно. Заметим, что $p^1, p^2 \in \operatorname{Ann}_{R_1} p$, то есть в случае $p^1 \neq 0$ и $p^2 \neq 0$ аннулятор p не одномерен. Если p^i равно нулю, то для любой вершины $\beta \in S_i \backslash \{\alpha\}$ выполнено $x_\beta \in \operatorname{Ann}_{R_1} p$, откуда следует, что аннулятор p также не одномерен. $\square$

Из предложения 3 и лемм 5 и 4 получаем:

Предложение 4. *Над алгеброй графа существуют несвободные модули нулевой G-размерности тогда и только тогда, когда граф является деревом. Множество классов изоморфизма несвободных циклических модулей нулевой G-размерности над алгеброй дерева параметризуется элементами множества $PR_1 \backslash H$, где H — объединение гиперплоскостей $\{p_\alpha = 0\}$ по всем внутренним вершинам α.*

Доказательство. Положим $p = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и $q = \tilde{p}$. По лемме 5 $pq = 0$. Осталось проверить второе условие предложения 3. Действительно, из леммы 5 следует, что ядро умножения на p (соответственно, q) как отображения $R_1 \to R_2$ одномерно. Так как $\dim R_1 = \dim R_2 + 1$, это отображение сюръективно.

Обратно, пусть α — внутренняя вершина и $p_\alpha = 0$. Так как $\dim_k \operatorname{Ann}_{R_1} p \geqslant 2$, размерности компонент модуля $R/(p)$ не будут удовлетворять условию (5) из теоремы 1.

То, что построенные для различных элементов $PR_1\ H$ модули не изоморфны следует, например, из того, что у них разные аннуляторы. $\square$

Далее мы обобщаем этот результат на все конечнопорожденные неразложимые модули нулевой G-размерности. Каждый такой модуль M порождается столбцами матрицы $A \in \operatorname{Mat}_s(R_1)$, $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{s}$. Через A_α будем обозначать матрицу $((a_{i,j})_\alpha)_{i,j=1}^{s}$. Матрицу $A \in \operatorname{Mat}_s(R_1)$, для которой для каждой внутренней вершины α дерева T матрица A_α над полем k невырожденная, будет называть *невырожденной*.

Теорема 2. *R-модуль $M \subset R^s$, порожденный столбцами матрицы $A \in \operatorname{Mat}_s(R_1)$, имеет нулевую G-размерность тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная.*

Доказательство. Пусть матрица A невырожденная.

Лемма 6. *Пространство соотношений для системы столбцов A с коэффициентами из R_1 имеет размерность s над k. И если столбцы матрицы $B \in \mathrm{Mat}_s(R_1)$ — базис этого пространства соотношений, то матрица B также невырождена.*

Доказательство. Будем строить столбец $v \in R_1^s$ такой, что $Av = 0$. Это матричное равенство равносильно следующей системе, в которой (α, β) пробегает все ребра T:

$$A_\beta v_\alpha + A_\alpha v_\beta = 0 \tag{1}$$

Если α — внутренняя вершина, то вектор v_β из этого равенства определяется однозначно. Рассмотрим некоторую внутреннюю вершину α_0. Тогда по v_{α_0} весь v строится однозначно, откуда и следует s-мерность пространства соотношений.

Аналогичным образом, если столбцы матрицы $B \in \mathrm{Mat}_s(R_1)$ образуют базис пространства соотношений, то её можно искать из начального условия $B_{\alpha_0} = E$ и соотношений $A_\alpha B_\beta + A_\beta B_\alpha = 0$, где (α, β) пробегает все ребра дерева T. Таким образом, для всякой внутренней вершины α матрица B_α есть произведение в некотором порядке некоторых из матриц A_β (где β также внутренняя), им обратных и матрицы B_{α_0}, то есть является невырожденной матрицей.

□

Следующее следствие вытекает из того, что условие на невырожденность матрицы A сохраняется при транспонировании.

Следствие 3. *То же верно и для соотношений между строками.*

Из леммы 6 мы получаем, что модуль M, задаваемый невырожденной матрицей A, обладает минимальной свободной резольвентой $\ldots F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \to M \to 0$, в которой для всех i выполнено $F_i \cong R^s$ и φ_i задается невырожденной матрицей $A_i \in \mathrm{Mat}_s(R_1)$.

Из леммы 1 следует, что сопряженный комплекс $0 \to M^* \to F_0^* \xrightarrow{\varphi_1^*} F_1^* \to \ldots$ является ациклическим, так как все φ_i^* задаются невырожденными матрицами A_i^T и, следовательно, $\dim_k \mathrm{Ker}\, \varphi_i^* = s$ для всех i. Применяя лемму 6 к модулю M^*, заданному невырожденной матрицей A^T, получаем бесконечную в обе стороны свободную резольвенту для M. Снова применяя лемму 1 получаем, что сопряженная к этой резольвенте последовательность также точна. Отсюда следует, что M^* является горенштейново проективным, значит имеет нулевую G-размерность. Согласно замечанию 4, M также имеет нулевую G-размерность.

Теперь докажем обратное утверждение. Пусть модуль M, порожденный столбцами матрицы A имеет нулевую G-размерность. Обозначим через $B \in \mathrm{Mat}_s(R_1)$ матрицу составленную из порождающих модуля сизигий.

Лемма 7. *Пусть для некоторой внутренней вершины α_0 дерева T матрица A_{α_0} вырождена. Тогда для любой $\beta \in T$ матрица B_β вырождена.*

Доказательство. Подвесим дерево T за вершину α_0. Пусть α_1 и α_2 смежны с α_0. Через T_1 (соответственно, T_2) обозначим максимальное поддерево, содержащее α_1 (соответственно, α_2), в котором вершина α_0 является висячей. Очевидно, $\alpha_1 \notin T_2$, $\alpha_2 \notin T_1$ и $T_1 \cap T_2 = \{\alpha_0\}$.

Через β_1 обозначим самую низкую (относительно исходного подвешивания) внутреннюю вершину T, лежащую в T_1, такую, что A_{β_1} вырождена. К β_1 подвешено несколько поддеревьев в T_1: $t_1, \ldots, t_k$, в которых матрицы всех внутренних вершин уже невырождены. Обозначим сыновей вершины β_1 через $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ так, чтобы $\gamma_i \in t_i$.

Построим ненулевой вектор $v \in R_1^s$ такой, что $Av = 0$ и $v_\alpha = 0$ при $\alpha = \beta_1$ и $\alpha \notin t_1 \cup \ldots \cup t_k$. Для этого достаточно взять в качестве v_{γ_i} произвольные ненулевые вектора из ядра A_{β_1}. Из доказательства леммы 6 следует, что v определяется на остальных вершинах из $t_1, \dots, t_k$ корректно и однозначно. Нетрудно видеть, что построенный вектор удовлетворяет соотношениям 1.

Так как v является k-линейной комбинацией столбцов B, для всех вершин $\alpha \notin t_1 \cup \ldots \cup t_k$ матрица B_α вырождена. Проделав аналогичную операцию для T_2, получаем требуемое. □

Теперь, перейдя при необходимости к модулю сизигий, допускаем, что все матрицы A_α вырождены.

Рассмотрим какие-либо две вершины β_1 и β_2, которые смежны хотя бы с одной висячей, или одну вершину β_1, которая смежна хотя бы с двумя висячими. Обозначим через r максимум рангов A_{β_1} и A_{β_2} (или просто ранг A_{β_1} в случае одной вершины), $r < s$. Так же, как и выше, можно построить $2(s-r)$ линейно независимых над k элементов v степени 1 из модуля сизигий, для которых $v_\alpha = 0$ для всех вершин за исключением висячих вершин смежных с β_i. Если $2r < s$, то это противоречит тому, что для всех модулей сизигий нашего модуля размерность первой градуированной компоненты равна s. Если $2r \geqslant s$, то для матрицы B, задающей модуль сизигий, получим, что $\operatorname{rank} B_{\beta_i} \leqslant s - (2s - 2r) = 2r - s < r$. Таким образом, после конечного числа шагов мы окажемся в ситуации $2r < s$ и получим противоречие. □

Следствие 4. *Классы изоморфизмов модулей нулевой G-размерности с минимальным числом порождающих b, не содержащих свободных прямых слагаемых, над k-алгеброй дерева T с n вершинами находятся в биективном соответствии с классами относительного подобия наборов из $n-1$ матрицы размера $b \times b$ над k, занумерованных вершинами дерева кроме одной фиксированной внутренней вершины, в которых матрицы, соответствующие внутренним вершинам дерева, являются невырожденными.*

6 Неприводимые модули нулевой G-размерности над алгебрами деревьев.

Пусть R — локальная или стандартная градуированная алгебра с максимальным или максимальным однородным идеалом $\mathfrak{m}$, причем $\operatorname{depth} R = 0$. Рассмотрим R-модуль M нулевой G-размерности, не содержащий свободных подмодулей. Такой модуль будем называть *приводимым*, если он содержит собственный подмодуль N нулевой G-размерности (равносильно, собственный подмодуль N, для которого M/N имеет нулевую G-размерность).

Лемма 8. *M приводим тогда и только тогда, когда M^* приводим.*

Доказательство. Пусть $0 \to N \to M \to P \to 0$, где N и P имеют нулевую G-размерность. Тогда $0 \to P^* \to M^* \to N^* \to 0$ также точна, то есть M^* приводим. Обратное верно, так как $M = M^{**}$. □

Лемма 9. *Пусть R градуированная алгебра, и $M = M_1 \oplus M_2$ градуированный модуль с двумя ненулевыми компонентами. Тогда всякий подмодуль $N \subset M$ изоморфен однородному подмодулю.*

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_q$ — минимальная система порождающих модуля N, причем $a_i = a_i' + a_i''$, где $a_i' \in M_1$ и $a_i'' \in M_2$. После k-линейной замены можно считать, что $a_1', \dots, a_p'$ линейно независимы над k, а $a_{p+1}' = \ldots = a_q' = 0$. Тогда набор $a_1', \dots, a_p', a_{p+1}'', \dots, a_q''$ является минимальной системой порождающих однородного подмодуля N'. Имеют место представления $N = \langle a_1, \dots, a_p \rangle \oplus \langle a_{p+1}'', \dots, a_q'' \rangle$ и $N' = \langle a_1', \dots, a_p' \rangle \oplus \langle a_{p+1}'', \dots, a_q'' \rangle$. Отображение $\varphi\colon \langle a_1, \dots, a_p \rangle \to \langle a_1', \dots, a_p' \rangle$, заданное формулой $\varphi(r_1 a_1 + \ldots + r_p a_p) = r_1 a_1' + \ldots + r_p a_p'$ задает изоморфизм между N' и N. □

Далее предполагаем, что $\mathfrak{m}^3 = 0$, то есть можно рассматривать R как градуированную алгебру, а модули нулевой G-размерности как градуированные модули.

Лемма 10. *Модуль M приводим тогда и только тогда, когда его модуль сизигий приводим.*

Доказательство. Пусть M приводим и содержит однородный собственный модуль $N \subset M$ нулевой G-размерности. Минимальная система порождающих для N является частью минимальной системы порождающих для M, то есть $\mathrm{Syz}(N)$ естественным образом вкладывается в $\mathrm{Syz}(M)$. Так как M не содержит свободных подмодулей, $\mathrm{Syz}(N)$ является собственным подмодулем $\mathrm{Syz}(M)$.

Обратно, пусть модуль сизигий $P = \mathrm{Syz}(M)$ приводим. Имеет место точная последовательность $0 \to P \to R^b \to M \to 0$, где $b = \dim_k M_1$. Тогда точна и $0 \to M^* \to R^b \to P^* \to 0$, откуда $\mathrm{Syz}\, P^* = M^*$. P приводим, значит P^* приводим, значит $M^* = \mathrm{Syz}\, P^*$ приводим, откуда уже и M приводим. □

Будем называть матрицу $A \in \mathrm{Mat}_b(R_1)$ *приводимой*, если существуют такие обратимые матрицы $C, D \in \mathrm{Mat}_b(k)$ и такое натуральное l, $0 < l < b$, что матрица CAD имеет угол нулей размера $(b-l) \times l$.

Лемма 11. *Пусть $M = \mathrm{Im} f$ приводимый модуль нулевой G-размерности с минимальной системой порождающих из b элементов, где $\varphi\colon R^b \to R^b$ задается матрицей $A \in \mathrm{Mat}_b(R_1)$. Тогда матрица A приводима.*

Доказательство. M изоморфен $\mathrm{Syz}(P)$ для некоторого P, содержащего подмодуль N с минимальной системой из l порождающих. Из доказательства леммы 10 видно, что при естественном вложении $\mathrm{Syz}(P)$ в R^b имеет подмодуль с l порождающими, содержащийся в подмодуле, порожденном первыми l базисными элементами в R^b. Иначе говоря, $M = \mathrm{Syz}(P)$ задается матрицей $B \in \mathrm{Mat}_b(R_1)$ с углом нулей размера $(b-l) \times l$. Значит, существуют матрицы $C, D \in \mathrm{GL}_b(k)$ такие, что $B = CAD$. □

Теорема 3. *Пусть R — алгебра дерева, и M — модуль нулевой G-размерности с b порождающими, заданный как подмодуль в R^b матрицей $A \in \mathrm{Mat}_b(R_1)$. Тогда M приводим, если и только существуют матрицы $C, D \in \mathrm{GL}_b(k)$ и число $0 < l < b$ такие, что для CAD имеет угол нулей размера $(b-l) \times l$.*

Доказательство. В одну сторону теорема следует из леммы 11. Если такие C и D существуют, то будем предполагать, что A уже имеет угол нулей размера $(b-l) \times l$. Через B обозначим левую верхнюю подматрицу размера $l \times l$. Из невырожденности A следует невырожденность B, а значит по теореме 2 столбцы матрицы B порождают модуль нулевой G-размерности. □

Теорема 4. *Для всякого b над алгеброй дерева существует неприводимый модуль нулевой G-размерности с b порождающими.*

Доказательство. Если $b = 1$, то всякий несвободный циклический модуль нулевой G-размерности неприводим.

Пусть $b \geqslant 2$. Выберем в дереве внутреннюю вершину α и две произвольные вершины β_1 и β_2. Для всех остальных вершин γ выбираем матрицы A_γ с единственным ограничением, что для внутренних вершин γ матрица A_γ невырожденная. Полагаем $A_\alpha = E$, а матрицы A_{β_1} и A_{β_2} выбираем такими, что для любых $C, D \in \mathrm{GL}_b(k)$ матрицы CD, $CA_{\beta_1}D$ и $CA_{\beta_2}D$ не имеют общего инвариантного подпространства $L \subset k^b$. Если бы такие C, D и L существовали, то $DL \subset C^{-1}L$ и $A_{\beta_i}(DL) \subset C^{-1}L$ $(i = 1, 2)$. Так как $\dim DL = \dim C^{-1}L$, то $DL = C^{-1}L$, и A_{β_1} и A_{β_2} имели бы общее инвариантное подпространство. Чтобы такого не произошло, достаточно взять в качестве A_{β_1} жорданову клетку с ненулевым собственным значением, а в качестве A_{β_2} — транспонированную жорданову клетку.

Несложно видеть, что построенная матрица A будет неприводимой. □

Теорема 5. *Пусть поле k не является алгебраическим расширением конечного поля, и R — алгебра дерева, не являющегося звездой, над k. Тогда для любого $b \geqslant 2$ существует неприводимый модуль с b образующими, обладающий непериодической резольвентой.*

Доказательство. Так как дерево не является звездой, в нём имеется простой путь длины 4, вершины которого мы обозначим через 1, 2, 3 и 4. Выберем невырожденную матрицу $A \in \mathrm{Mat}_b(R_1)$, для которой $A_2 = E$, A_1 — жорданова клетка, $A_4 = A_1^T$ и $A_3 = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, a)$, где a не является корнем из единицы. Пусть M — модуль, задаваемый матрицей A, и $M^{(i)}$ обозначает его i-ый модуль сизигий, заданный матрицей $A^{(i)}$. Покажем, что $M^{(i)}$ не изоморфен M.

Предположим противное. Пользуясь соотношениями из леммы 6, несложно проверить по индукции, что $A_2^{(i)} = E$, $A_1^{(i)} = (-1)^i A_1$, $A_3^{(i)} = (-1)^i A_3$ и $A_4^{(i)} = A_3^{-i} A_4 A_3^i$. Если $M \cong M^{(i)}$, то $M \cong M^{(2i)}$, поэтому можно считать i четным. В случае такого изоморфизма нашлись бы матрицы U и V такие, что $UV = E$, $UA_1V = A_1$, $UA_3V = A_3$ и $A_4^{(i)} = UA_4V$. Тогда $V = U^{-1}$, U перестановочна с A_1 и A_3, а значит является скалярной. Тогда $A_4^{(i)} = A_4$, но ни одна степень матрицы A_3 не перестановочна с жордановой клеткой.

Аналогично, $M^{(i)}$ не изоморфно $M^{(j)}$ при $i \neq j$, откуда и следует, что резольвента непериодична. □

Замечание 5. Если k является алгебраическим расширением конечного поля, то модуль M определен над некоторым конечным подполем k. Более того, все модули $M^{(i)}$ определены над этим же конечным подполем k и имеют то же число порождающих. Таких модулей с точностью до изоморфизма лишь конечное число, а значит резольвента заведомо будет периодической.

7 Неразложимые модули нулевой G-размерности над алгебрами деревьев.

В этом разделе мы получим результаты аналогичные результатам раздела 6 для неразложимых модулей нулевой G-размерности. Пусть R — локальная или стандартная градуированная алгебра с максимальным или максимальным однородным идеалом $\mathfrak{m}$, причем $\operatorname{depth} R = 0$. Модуль M нулевой G-размерности над алгеброй R будет называть *неразложимым*, если не раскладывается в прямую сумму ненулевых подмодулей. Заметим, что в силу предложения 1 в градуированном случае это равносильно тому, что он не раскладывается в прямую сумму ненулевых однородных подмодулей.

Лемма 12.

1. *Если M разложим в прямую сумму $K \oplus L$, то K и L имеют нулевую G-размерность;*
2. *M неразложим тогда и только тогда, когда M^* неразложим;*
3. *M неразложим тогда и только тогда, когда $\mathrm{Syz}(M)$ неразложим.*

Доказательство. Пусть $M = K \oplus L$. Тогда $M^* = K^* \oplus L^*$ и $M \cong M^{**} = K^{**} \oplus L^{**}$, а значит из разложимости M следует разложимость M^* и наоборот. Из инъективности и сюръективности $M \to M^{**}$ следует инъективность и сюръективность $K \to K^{**}$ и $L \to L^{**}$. Так как Ext коммутирует с прямыми суммами, отсюда следует, что K и L имеют нулевую G-размерность.

Из разложимости M следует разложимость $P = \mathrm{Syz}(M)$, покажем обратную импликацию. Аналогично доказательству леммы 10, $\mathrm{Syz}\, P^* = M^*$. Если P разложим, то P^* разложим, то есть $\mathrm{Syz}\, P^* = M^*$ разложим, а значит и M разложим. □

Пусть теперь R — алгебра дерева. Матрицу $A \in \mathrm{Mat}_b(R_1)$ будем называть *разложимой*, если существуют такие обратимые матрицы $C, D \in \mathrm{Mat}_b(k)$, что матрица CAD имеет блочно-диагональный вид.

Предложение 5. *Пусть R — алгебра дерева, M — R-модуль нулевой G-размерности с b порождающими, заданный как подмодуль в R^b матрицей $A \in \mathrm{Mat}_b(R_1)$. Тогда M разложим тогда и только тогда, когда A разложима.*

Доказательство. В случае разложимости A разложимость M очевидна.

Пусть M разложим. Тогда разложим также модуль $N = (\mathrm{Syz}\, M)^*$. Пусть $N = K \oplus L$, $f_1, \dots, f_l$ — базис в K, а $e_1, \dots, e_{b-l}$ — базис в L. В этом базисе $\mathrm{Syz}(N)$ будет задан блочно-диагональной матрицей с двумя блоками размера $l \times l$ и $(b-l) \times (b-l)$. Так как $\mathrm{Syz}(N) = M^*$, M тоже будет задан в соответствующем базисе блочно-диагональной матрицей. Что и требовалось. $\square$

8 CI-размерность модулей над алгебрами деревьев.

Наряду с G-размерностью была введена серия гомологических размерностей модулей, совпадающих с проективной размерностью, когда последняя конечна, и совпадающих между собой, когда какие-либо из них конечны. Мы рассмотрим здесь для модулей над алгебрами деревьев CI-размерность, введенную Аврамовым, Гашаровым и Пеевой ([11]).

Определение 6. *Деформацией* кольца R называется сюръективный гомоморфизм локальных колец $Q \to R$, ядро которого, порождено регулярной последовательностью.

Квазидеформацией кольца R называется диаграмма гомоморфизмов локальных колец $R \to R' \leftarrow Q$, где $R \to R'$ — плоское расширение, а $Q \to R'$ — деформация.

Говорят, что R-модуль M *имеет конечную* CI-*размерность*, если для некоторой квазидеформации кольца R модуль $R' \otimes_R M$ имеет конечную проективную размерность над Q.

Модуль конечной CI-размерности имеет конечную G-размерность, но обратное, вообще говоря, неверно. Над алгебрами Ёсино, полученными при помощи деформации, все модули нулевой G-размерности имеют нулевую CI-размерность.

Теорема 6. *Над алгеброй дерева, не являющегося звездой, все несвободные модули имеют бесконечную* CI-*размерность.*

Доказательство. Для доказательства используется техника, развитая в работах [12, 13, 14]. Пусть R — стандартная градуированная алгебра над полем k с квадратичными соотношениями, то есть факторалгебра свободной ассоциативной (тензорной) алгебры $T(R_1)$ по идеалу порожденному некоторым подпространством $Q \subset R_1 \otimes_k R_1$. Тогда двойственная к ней алгебра $T(R_1^*)/(Q^\perp)$, где $Q^\perp \subset R_1^* \otimes R_1^*$ — ортогональное дополнение к Q, изоморфна подалгебре в алгебре Йонеды $\mathrm{Ext}^*_R(k,k)$, порожденной $\mathrm{Ext}^1_R(k,k)$. В случае, когда R козюлева, $\mathrm{Ext}^1_R(k,k)$ порождает всю алгебру $\mathrm{Ext}^*_R(k,k)$. Алгебра $\mathrm{Ext}^*(k,k)$ является универсальной обертывающей некоторой градуированной алгебры Ли — гомотопической алгебры Ли $\pi^*(R)$ алгебры R. Согласно [11, 13], если M — модуль конечной CI-размерности, то левый $\mathrm{Ext}^*_R(k,k)$-модуль $\mathrm{Ext}^*_R(M,k)$ конечнопорожден над k-подалгеброй в $\mathrm{Ext}^*_R(k,k)$, порожденной центральными элементами степени 2. Поэтому, если таких элементов нет, то пространство $\mathrm{Ext}^*_R(k,k)$ должно быть конечномерно над k, что означало бы, что модуль M имеет конечную проективную размерность. В нашем случае она бы была равна нулю, то есть модуль M был бы свободен. Поэтому достаточно доказать, что $\pi^2(R)$ не содержит центральных элементов степени 2.

Доказывать это будем, выписав явно определяющие соотношения для $\mathrm{Ext}^2_R(k,k)$ и вычислив базис Грёбнера для идеала ими порожденного. Так как R задается в свободной ассоциативной алгебре соотношениями второй степени, алгебра $\mathrm{Ext}^*_R(k,k)$ порождается элементами первой степени (см. [14, теорема 1.2]). Эти соотношения второй степени можно выписать явно: $R = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/W$, где $W \subset V \otimes V$ $(V = \langle x_1, \dots, x_n\rangle)$ — подпространство натянутое на соотношения вида $x_i x_j - x_j x_i$ для всех i и j и $x_i x_j$ при $(i,j) \notin T$. Из соображений размерности, двойственное подпространство

$W^\perp$ в $V^* \otimes V^*$ имеет размерность $n-1$. Если обозначит базис в V^* двойственный к $x_1, \ldots, x_n$ через $y_1, \ldots, y_n$, то базис этого двойственного подпространства легко выписать: это все выражения вида $y_i y_j + y_j y_i$ при $(i,j) \in T$.

Согласно [14, следствие 1.3], $\mathrm{Ext}^*_R(k,k) = k\langle y_1, \ldots, y_n\rangle / \left(W^\perp\right)$ со стандартной градуировкой. Для вычислений в этой алгебре будем использовать базисы Гребнера.Введем на мономах степенное лексикографическое упорядоченье: сравниваются сначала степени мономов, а в случае равенства сами мономы сравниваются лексикографически. Порядок на переменных: $y_1 > y_2 > \ldots > y_n$. Для набора порождающих $\{f_{ij} = y_i y_j + y_j y_i | (i,j) \in T\}$ проведем алгоритм Бухбергера. Он построит, вообще говоря, бесконечный набор многочленов. Однако, так как исходные многочлены были однородны, построенный набор будет также состоять из однородных многочленов. Нас интересуют в нем многочлены степени не больше трех.

Лемма 13. *В построенном базисе Гребнера многочлены второй степени исчерпываются f_{ij}, а многочлены третьей степени таковы: $\{y_i y_k y_j - y_j y_i y_k | i < j < k, (i,j), (j,k) \in T\}$.*

Доказательство. S-полином, взятый от однородных многочленов степеней d_1 и d_2 имеет степень не меньше $\max(d_1, d_2) + 1$. Поэтому нам достаточно рассмотреть S-полиномы многочленов f_{ij}. Единственное возможное зацепление — между многочленами f_{ij} и f_{jk}, где $i < j < k$. S-полином в таком случае имеет вид $f_{ij} y_k - y_i f_{jk} = y_j y_i y_k - y_i y_k y_j$. Старший моном в этом многочлене $y_i y_k y_j$ не редуцируется дальше, так как в дереве не могут быть одновременно ребра (i,j), (j,k) и (i,k). Дальнейший ход алгоритма Бухбергера будет только увеличивать степень. Таким образом, полученный набор многочленов исчерпывает элементы базиса Гребнера до степени три. □

Рассмотрим некоторый элемент второй степени в $\mathrm{Ext}^*_R(k,k)$

$$a = \sum_{(i,j) \notin T} \left(a'_{ij} y_i y_j + a''_{ji} y_j y_i\right) + \sum_{(i,j) \in T, i<j} b_{ij} y_j y_i \tag{2}$$

Нас интересуют коммутаторы вида $[a, y_k]$. Так как редукция относительно нашего базиса Гребнера заменяет моном на моном с тем же набором переменных, равенство этого коммутатора нулю равносильно равенству нулю коммутаторов y_k с каждым из слагаемых из обеих сумм в формуле (2). Покажем, что для любого такого элемента a найдется k, что $[a, y_k] \neq 0$. Разберем несколько случаев:

1. Для некоторого i моном y_i^2 входит в a с ненулевым коэффициентом. Пусть j — вершина не смежная с i (она найдется в силу условия на дерево T). Тогда $[y_i^2, y_j] = y_i^2 y_j - y_j y_i^2 \neq 0$, так как ни один из этих мономов не редуцируется при помощи базиса Гребнера.

2. Для некоторых i и j таких, что $(i,j) \notin T$ один из мономов $y_i y_j$ и $y_j y_i$ входит в a с ненулевым коэффициентом. Тогда коммутатор $[a'_{ij} y_i y_j + a''_{ji} y_j y_i, y_i]$ имеет вид $\alpha y_i^2 y_j + \beta y_i y_j y_i + \gamma y_j y_i^2$, причем хотя бы одно из чисел α и γ не равно нулю. Это выражение не равно нулю, так как ни один из мономов не редуцируется при помощи базиса Гребнера.

3. Для некоторых $i < j$, $(i,j) \in T$ моном $y_j y_i$ входит в a с ненулевым коэффициентом. Пусть k — вершина не смежная с i. Тогда рассмотрим коммутатор $[y_j y_i, y_k] = y_j y_i y_k - y_k y_j y_i$. Если $(j,k) \notin T$, то ни один из этих мономов не редуцируется, а значит и весь коммутатор не равен нулю. Если же $(j,k) \in T$, то возможны два случая:

   (a) $j < k$. Тогда старшим мономом в коммутаторе является $y_j y_i y_k$, который не редуцируется.

   (b) $j > k$. Тогда возможна редукция при помощи f_{kj}: $y_j y_i y_k - y_k y_j y_i \to y_j y_i y_k + y_j y_k y_i$. В полученном многочлене ни один моном не редуцируется.

Таким образом, в $\mathrm{Ext}^*_R(k,k)$ нет центральных элементов второго порядка, что и требовалось. $\square$

Замечание 6. Доказать отсутствие нетривиальных деформаций у алгебры дерева отличного от звезды в случае бесконечного поля k можно и элементарными методами.

Доказательство. Ряд Гильберта для R имеет вид $H_R(t) = 1 + nt + (n-1)t^2$. При факторизации по неделителю нуля степени d ряд Гильберта умножается на $(1 - t^{d_i})$. Таким образом, ряд для деформации должен иметь вид $H_S(t) = \frac{H_{A(T)}(t)}{\prod(1-t^{d_i})}$. Над бесконечным полем можно считать, что порождающие имеют степень один, а значит ряд $H_S(t)$ переписывается в виде $\frac{p(t)}{(1-t)^k}$. Так как $d_i > 1$, получаем, что $k = 1$ и $p(t) = 1 + (n-1)t$. Поэтому, если деформация возможна, то она осуществляется одним регулярным элементом степени 2.

Пусть такая деформация существует. Обозначим через I идеал $(x_1^2, \dots, x_n^2, x_ix_j | (i,j) \notin T)$, иначе говоря, $R = k[x_1, \dots, x_n]/I$. Пусть тогда деформация S имеет вид $k[x_1, \dots, x_n]/J$, где $J \subset I$. Размерности их компонент степени 2 отличаются на единицу: $\dim I_2 = \dim J_2 + 1$. Тогда для любого $y \in I_2$

J_2 образ $\bar{y}$ в $S = k[x_1, \dots, x_n]/J$ должен быть делителем нуля. Разберем два случая.

Случай 1. y может быть выбран в виде x_ix_j с $i \neq j$. Рассмотрим размерность $\dim(\bar{y}\langle x_1, \dots, x_n\rangle)$. Так как $\bar{y}$ — не делитель нуля, она должна быть равна n. Рассмотрим некоторое k. Тогда:

1. среди пар i, k и j, k есть либо пара равных, либо неребро. Тогда соответствующее произведение по модулю J_2 пропорционально x_ix_j, а весь моном $x_ix_jx_k$ пропорционален $x_i^2x_j$ или $x_ix_j^2$;

2. $(i,k) \in T$ и $(j,k) \in T$. Таких k не более одного. Действительно, найдись ещё k' с таким свойством, в дереве T был бы цикл i, k, j, k'.

Таким образом, рассматриваемое пространство имеет размерность не более трех. При $n \leqslant 3$ все деревья являются звездами.

Случай 2. Все x_ix_j с $i \neq j$ и $(i,j) \notin T$ лежат в J, а y можно выбрать равным x_i^2. Снова рассмотрим пространство $\bar{y}\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Пусть степень вершины x_i равна d. Пусть $(i,j) \notin T$, тогда $x_i^2x_j$ лежит в J, а значит размерность рассматриваемого пространства не превосходит $d+1$. Это возможно только в случае $d = n-1$, что соответствует только звезде. $\square$

Список литературы

[1] Y. Yoshino, *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, 146. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[2] R. Takahashi, *On the number of indecomposable totally reflexive modules*, Bulletin of the London Mathematical Society, 2007, **39** ,№ 3, pp. 487-492.

[3] R. Takahashi, *An uncountably infinite number of indecomposable totally reflexive modules*, Nagoya Math. J., **187**, 2007, pp. 35-48.

[4] L.W. Christensen, *Gorenstein dimensions*, Lecture Note in Math., Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[5] Y. Yoshino, *Modules of G-dimension zero over local rings with the cube of maximal ideal being zero*,Commutative Algebra, Singularities and Computer Algebra NATO Science Series, **115**, 2003, pp. 255-273.

[6] R.Takahashi, *On the category of modules of Gorenstein dimension zero*, Math.Z., 251, №2, pp. 249-256, 2005.

[7] R. Takahashi, *On the category of modules of Gorenstein dimension zero II*, J. Algebra, 278, pp. 402-410, 2004.

[8] R.Takahashi, *Modules of G-dimension zero over local rings of depth two*, Illinois J. Math., 251, pp. 249-256, 2005.

[9] O. Veliche, *Construction of modules with finite homological dimensions* , J.Algebra, **250** , №2, 2002, 427–449.

[10] Beilinson A., Ginzburg V., Soergel W., *Koszul duality patterns in representation theory*, J. Amer. Math. Soc, 9, №2, pp. 473-521, 1996.

[11] L.L. Avramov, V.N. Gasharov, I.V. Peeva, *Complete intersection dimension*, Publ. Math. I.H.E.S., 1997, **86** , №1, pp 67-114.

[12] L.L. Avramov, *Infinite free resolutions*, Six lectures on commutative algebra, Progr. Math. 168, pp. 1-118, 1998.

[13] L.L. Avramov, L. Sun, *Cohomology operators defined by a deformation* , J. Algebra, **204**, 1995, pp. 684-710.

[14] C. Lofwall, *On the subalgebra generated by the one-dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra*, Algebra, Algebraic Topology and their Interactions, Lecture Notes in Mathematics, **1183**, 1986, pp 291-338.