

КОМПОЗИЦИЯ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР ПО ДВУМ ГОМОМОРФИЗМАМ

Д. В. Дубнов

В 2000 году автором совместно с А.И. Бондалом была обнаружено ассоциативное умножение на тензорном произведении ассоциативных алгебр, определяемое парой гомоморфизмов. Если A, B — ассоциативные алгебры над полем k , $F : A \rightarrow B$, $G : B \rightarrow A$ — гомоморфизмы алгебр, то $A \circ B$ — это векторное пространство $A \otimes B$ с умножением

$$a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1 G(b_1) a_2 \otimes b_2 + a_1 \otimes b_1 F(a_2) b_2) - a_1 G(b_1) \otimes F(a_2) b_2.$$

Частный случай этой конструкции даёт важную для гомологической алгебры композицию колчанов с соотношениями. Пусть A, B , — алгебры колчанов с соотношениями над полем k с изоморфной полупростой частью, то есть $A = C \oplus J(A)$, $B = C \oplus J(B)$, $C = k^n = ke_1 \oplus \dots \oplus ke_n$. Радикал Джекобсона алгебры A (аналогично B) разлагается в сумму векторных пространств $J(A) = C \oplus A_{ij}$, где $A_{ij} = p_i J(A) p_j$.

Поскольку $A/J(A) = C$, $B/J(B) = C$, изоморфизм полупростых частей даёт пару гомоморфизмов $F : A \rightarrow B$, $G : B \rightarrow A$, образом которых является C . Алгебру $A \circ_{(F,G)} B$ можно отфакторизовать до алгебры $A \circ_C B$ на векторном пространстве $A \otimes_C B = C \oplus J(A) \oplus J(B) \oplus \bigoplus_{i,j,k=1,\dots,n} A_{i,j} \otimes B_{j,k}$ с полупростой частью C и умножением в радикале

$$a_{ij} b_{kl} = \delta_{jk} a_{ij} \otimes b_{kl}, \quad b_{kl} a_{ij} = 0, \quad a_{ij} \in A, \quad b_{kl} \in B.$$

Гомологическая размерность алгебры $A \circ_C B$ не превосходит сумму гомологических размерностей алгебр A и B .

Будет построено псевдодифференцирование $A \circ B$, планируется разбор ряда примеров.

МТУСИ, Москва

E-mail address: ddubnov@yandex.ru