22 марта 2024 года

ШЕСТНАДЦАТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ

МЕХМАТ МГУ

1. Линейный оператор на пространстве $n \times n$ матриц переводит каждую невырожденную матрицу в матрицу с тем же определителем. Докажите, что он также переводит каждую вырожденную матрицу в вырожденную.

2. В своём докладе аспирант рассмотрел некоторую подгруппу G аддитивной группы комплексных $n \times n$ матриц $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, и заявил, что (комплексная) линейная оболочка G совпадает с $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Присутствовавший в аудитории профессор прослушал точное определение G, но тотчас же отметил, что в ней обязательно содержится невырожденная матрица. Как ему удалось это понять?

3. Пусть A и B – вещественные 2023×2024 матрицы. Известно, что строки A ортогональны строкам B (относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^{2024}$), а столбцы A ортогональны столбцам B (относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^{2023}$). Можно ли утверждать, что

$$\mathrm{rk}\,(A+B) = \mathrm{rk}\,A + \mathrm{rk}\,B?$$

4. Покажите, что если $A^{2024} = E$, где A – вещественная матрица сто на сто, то

$$\chi_A(1) \geqslant 0,$$

где $\chi_A(x)$ – характеристический многочлен матрицы A.

5. Для каких конечных групп G комплексная групповая алгебра $\mathbb{C}[G]$ порождается одним элементом?

6. Покажите, что в конечной группе, удовлетворяющей тождеству $x^6 = 1$, число элементов порядка 6 сравнимо с нулём или двойкой по модулю 6.

7. Назовём кольцо R *безушным*, если число различных корней в R каждого ненулевого многочлена из $R[x]$ не превосходит его степени. При каких n кольцо вычетов $\mathbb{Z}_n$ безушное?

8. Верно ли, что в векторном пространстве (над полем рациональных чисел) $\mathbb{Q}[x]$ операторы $h \mapsto hf$ и $h \mapsto hg$, где f и g – фиксированные многочлены положительной степени, подобны тогда и только тогда, когда

$$\deg f = \deg g?$$

Резальтаты олимпиады и решения задач появятся не позднее 14 апреля на сайте **http://halgebra.math.msu.su/Olympiad/**