Спецкурс: Введение в гиперболические группы.
(Осень 2021. Куликова О.В.)

Задачи к зачету/экзамену.

[1 лекция] Порождающие и определяющие соотношения группы. Свободные группы.

1. Доказать, что пересечение конечного числа подгрупп конечного индекса – снова подгруппа конечного индекса.
2. Доказать, что

   а) конечная диэдральная группа D_n имеет копредставление $< a, b|a^2 = 1, b^n = 1, a^{-1}ba = b^{-1} >$;

   б) бесконечная диэдральная группа D_∞ имеет копредставление $< a, b|a^2 = 1, aba^{-1} = b^{-1} >$.

   Используя преобразования Тице, выведите, что

   а) D_n имеет копредставление
   $$< x, y|x^2 = 1, y^2 = 1, (xy)^n = 1 >;$$
   б) D_∞ имеет копредставление
   $$< x, y|x^2 = 1, y^2 = 1 > .$$
3. Доказать, что группа Гейзенберга H имеет копредставление $< a, b|[[a, b], a] = 1, [[a, b], b] = 1 >$.
   $(H = \{\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | x, y, z \in \mathbb{Z}\}, a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$
4. Докажите, что в свободной группе ранга $r > 1$ абелевы подгруппы являются циклическими.

   [2 лекция] Граф Кэли.
5. Нарисовать графы Кэли для группы D_∞ относительно порождающих $\{a, b\}$ и $\{x, y\}$ (см. задачу 2).

   [3 лекция] Квазиизометрия
6. Докажите, что если H – конечная нормальная подгруппа конечно порожденной группы G, то G квазиизометрична факторгруппе G/H.

   [4 лекция] Рост группы.
7. Докажите, что

   а) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ имеет квадратичный рост,

   б) $\mathbb{Z}^k$ имеет полиномиальный рост степени k,

   в) группа Гейзенберга имеет полиномиальный рост степени 4.
8. Докажите, что рост групп не может быть более, чем экспоненциальным.

   [5 лекция] Диаграммы ван Кампена. Связь с графами Кэли.

9. Докажите, используя лемму ван Кампена, что в свободном произведении $G =< A_1, A_2|R_1, R_2 >$ групп $G_1 =< A_1|R_1 >$ и $G_2 =< A_2|R_2 >$ $(A_1 \cap A_2 = \emptyset)$ произведение $u_1v_1 \dots u_kv_k$ нетривиально, если $u_1, \dots, u_k$ – нетривиальные элементы в G_1, а $v_1, \dots, v_k$ – нетривиальные элементы в G_2.
10. Докажите, что если $p = e_1 \dots e_s$ – произвольный замкнутый путь в диаграмме ван Кампена над копредставлением $< A|R >$, то $Lab(p) =_G 1$.

[6 лекция] Функция Дэна.

11. Докажите, что

    а) линейные функции $a_1x + b_1$ и $a_2x + b_2$ эквивалентны,

    б) квадратичные функции с положительным старшим коэффициентом эквивалентны,

    в) полиномиальные функции одинаковой степени с положительным старшим коэффициентом эквивалентны,

    г) экспоненциальные функции 2^x и 3^x эквивалентны.
12. Используя преобразования Тице, докажите, что класс эквивалентности функции Дэна не зависит от выбора конечного задания $< A|R >$ группы G.
13. Докажите, что функция Дэна свободной абелевой группы ранга $k \geqslant 2$ эквивалентна квадратичной функции.

[7 лекция] Проблема равенства.

14. Описать алгоритм, решающий проблему равенства в $\mathbb{Z}^2 =< a, b|aba^{-1}b^{-1} >$.

[8 лекция] Группы с условием малых сокращений. Алгоритм Дэна.

15. Удовлетворяют ли условию $C'(1/7)$ копредставления групп:

    а) $< a, b|aba^{-1}b^{-1} >$,

    б) $< a, b, c, d|aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} >$?

[9-10 лекции] Геодезичекие метрич. пространства. Гиперболические пространства.

16. Доказать, что в геодезическом метрическом пространстве

    а) если x лежит на сегменте $[o, y]$, то $(x|y)_o = |o - x|$;

    б) если $x' \in [o, x]$, $y' \in [o, y]$, то $(x'|y')_o \leqslant (x|y)_o$.

[11 лекция] Гиперболические группы. Гиперболичность графа Кэли, свойство Дэна и линейность функции Дэна.

17. Доказать, что если G_1 и G_2 – гиперболические, то $G_1 * G_2$ – гиперболическая.

[12 лекция] Подгруппы гиперболических групп. Элементы конечного порядка и конечные подгруппы гиперболических групп.

18. Найти все классы сопряженности, состоящие из элементов конечного порядка, в бесконечной диэдральной группе.

29. Доказать, что если $G_1 \times G_2$ – гиперболическая группа, то одна из G_1 или G_2 – конечная, а другая -гиперболическая.

[13-14 лекции] Теорема о ломаной с длинными сегментами.

20. Доказать, что если $[x_1, \ldots, x_5]$ – пятиугольник в δ-гиперболическом пространстве такой, что $|x_1 - x_5|, |x_3 - x_4| \leqslant 2\delta$, то

$$[x_4, x_5] \subseteq \overline{U}_{4\delta}([x_1, x_2] \cup [x_2, x_3]).$$