Спецкурс: *Введение в гиперболические группы.*
(Весна 2023. Куликова О.В.)

Задачи к зачету/экзамену.

(На зачет/для допуска к экзамену необходимо решить и сдать $\geqslant 13$ задач из списка)

[1 лекция] Порождающие и определяющие соотношения группы. Граф Кэли

1. Доказать, что

   а) конечная диэдральная группа D_n имеет копредставление $< a, b | a^2 = 1, b^n = 1, a^{-1}ba = b^{-1} >$;

   б) бесконечная диэдральная группа D_∞ имеет копредставление $< a, b | a^2 = 1, aba^{-1} = b^{-1} >$.

   Используя преобразования Тице, выведите, что

   а) D_n имеет копредставление

   $$< x, y | x^2 = 1, y^2 = 1, (xy)^n = 1 >;$$

   б) D_∞ имеет копредставление

   $$< x, y | x^2 = 1, y^2 = 1 > .$$

2. Доказать, что группа Гейзенберга H имеет копредставление $< a, b | [[a, b], a] = 1, [[a, b], b] = 1 >$.
   $(H = \{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | x, y, z \in \mathbb{Z}\}, a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$
3. Докажите, что в свободной группе ранга $r > 1$ абелевы подгруппы являются циклическими.
4. Нарисовать графы Кэли для группы D_∞ относительно порождающих $\{a, b\}$ и $\{x, y\}$ (см. задачу 1).

[2 лекция] Квазиизометрия

5. Докажите, что если H – конечная нормальная подгруппа конечно порожденной группы G, то G квазиизометрична факторгруппе G/H.

[3 лекция] Рост группы.

6. Докажите, что

   а) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ имеет квадратичный рост,

   б) $\mathbb{Z}^k$ имеет полиномиальный рост степени k,

   в) группа Гейзенберга имеет полиномиальный рост степени 4.
7. Докажите, что рост групп не может быть более, чем экспоненциальным.

[4 лекция] Диаграммы ван Кампена.

8. Докажите, используя лемму ван Кампена, что в свободном произведении $G =< A_1, A_2|R_1, R_2 >$ групп $G_1 =< A_1|R_1 >$ и $G_2 =< A_2|R_2 >$ $(A_1 \cap A_2 = \emptyset)$ произведение $u_1 v_1 \ldots u_k v_k$ нетривиально, если $u_1, \ldots, u_k$ – нетривиальные элементы в G_1, а $v_1, \ldots, v_k$ – нетривиальные элементы в G_2.
9. Докажите, что если $p = e_1 \ldots e_s$ – произвольный замкнутый путь в диаграмме ван Кампена над копредставлением $< A|R >$, то $Lab(p) =_G 1$.

[5 лекция] Функция Дэна.

10. Докажите, что

    а) линейные функции $a_1 x + b_1$ и $a_2 x + b_2$ эквивалентны,

    б) квадратичные функции с положительным старшим коэффициентом эквивалентны,

    в) полиномиальные функции одинаковой степени с положительным старшим коэффициентом эквивалентны,

    г) экспоненциальные функции 2^x и 3^x эквивалентны.
11. Докажите, что функция Дэна свободной абелевой группы ранга $k \geqslant 2$ эквивалентна квадратичной функции.

[6-7 лекции] Геодезичекие метрич. пространства. Гиперболические пространства.

12. Доказать, что в геодезическом метрическом пространстве

    а) если x лежит на сегменте $[o, y]$, то $(x|y)_o = |o - x|$;

    б) если $x' \in [o, x]$, $y' \in [o, y]$, то $(x'|y')_o \leqslant (x|y)_o$.

[8 лекция] Гиперболические группы. Элементы конечного порядка и конечные подгруппы.

13. Доказать, что если G_1 и G_2 – гиперболические, то $G_1 * G_2$ – гиперболическая.
14. Найти все классы сопряженности, состоящие из элементов конечного порядка, в бесконечной диэдральной группе.
15. Доказать, что если $G_1 \times G_2$ – гиперболическая группа, то одна из G_1 или G_2 – конечная, а другая – гиперболическая.

[9 и 10 лекции] Квазигеодезические элементы.

16. Доказать, что элемент a имеет бесконечный порядок в группе $< a, b|bab^{-1} = a^2 >$, но a не является квазигеодезическим.

Список вопросов к экзамену.

1. Порождающие и определяющие соотношения группы, свободные группы. Граф Кэли.

2. Квазиизометрия. Примеры квазиизометрических пространств. Графы Кэли группы относительно разных конечных порождающих множеств. Подгруппы конечного индекса в конечно порожденной группе.

3. Примеры квазиизометрических инвариантов. Рост группы.

4. Диаграммы ван Кампена. Связь с графами Кэли.

5. Функция Дэна как квазиизометрический инвариант.

6. Функция Дэна и проблема равенства слов. Группы с условием малых сокращений.

7. Функция Дэна прямого произведения групп.

8. Геодезические метрические пространства. Гиперболические пространства (три определения). Их эквивалентность.

9. Теорема о ломаной (без доказательства). Леммы.

10. Гиперболичность, свойство Дэна и линейность изопериметрической функции. Примеры гиперболических групп.

11. Подгруппы гиперболических групп (примеры гиперболических и негиперболических подгрупп). Множество классов сопряженности элементов конечного порядка в гиперболической группе.

12. Множество классов сопряженности конечных подгрупп в гиперболической группе.

13. Определения квазигеодезического пути. Определение квазигеодезического элемента бесконечного порядка. Свойства.

14. Квазигеодезичность элемента бесконечного порядка в гиперболической группе. Сопряженные степени.