1 Введение в локально нильпотентные дифференцирования

1.1 Определения, простейшие свойства и примеры.

Пусть $\mathbb{K}$ — поле характеристики 0, а A — коммутативная ассоциативная $\mathbb{K}$-алгебра с единицей и без делителей нуля.

Определение 1. *Дифференцированием* алгебры A называется линейное отображение $D:\ A \to A$, удовлетворяющее правилу Лейбница:

$$D(ab) = Da \cdot b + a \cdot Db.$$

Кроме того, мы будем требовать, чтобы дифференцирование D обнуляло основное поле, то есть $D(\lambda) = 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$. Множество всех дифференцирований алгебры A будем обозначать $\mathrm{Der}(A)$.

Пример 1. Оператор частной производной $D = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ является дифференцированием алгебры $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ многочленов от n переменных.

Непосредственной проверкой устанавливается, что для любого $a \in A$ и $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(A)$ операторы aD_1 и $D_1 + D_2$ также являются дифференцированиями алгебры A. Таким образом $\mathrm{Der}(A)$ является A-модулем.

Упражнение 1. Показать, что для $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ выполнено:

$$\mathrm{Der}(A) = \left\{ D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n} \;\middle|\; f_1, \ldots, f_n \in A \right\}.$$

Упражнение 2.

- Проверить, что множество дифференцирований алгебры A замкнуто относительно коммутирования, а именно, если $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(A)$, то $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1 \in \mathrm{Der}(A)$.
- Показать, что любое векторное подпространство ассоциативной алгебры A, замкнутое относительно операции коммутирования, является *алгеброй Ли*, то есть, согласно определению, операция $[\cdot, \cdot]$ удовлетворяет свойству антисимметричности и тождеству Якоби:

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0.$$

Таким образом, помимо структуры A-модуля $\mathrm{Der}(A)$ обладает естественной структурой алгебры Ли над полем $\mathbb{K}$ относительно операции коммутирования $[\cdot, \cdot]$.

Теперь, когда понятие дифференцирования определено, мы можем перейти к определению и изучению основного понятия данного курса.

Определение 2. Дифференцирование $D \in \mathrm{Der}(A)$ называется *локально нильпотентным* ($D \in \mathrm{LND}(A)$), если для любого $a \in A$ найдется такое натуральное n, что $D^n a = 0$.

Наряду с локально нильпотентными дифференцированиями часто полезно бывает рассматривать *локально конечные* дифференцирования, то есть такие, что для любого $a \in A$ линейная оболочка множества $\{D^n a,\ n \in \mathbb{N}\}$ конечномерна. Из определения следует, что любое локально нильпотентное дифференцирование является локально конечным. Обратная импликация в общем случае не выполняется.

Пример 2. Пусть $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Дифференцирование $D = \frac{\partial}{\partial x_i}$ локально нильпотентно. Действительно, пусть $a \in A$ и степень a по переменной x_i равняется $m \geqslant 0$. Тогда $D^{m+1} a = 0$. Дифференцирование $x_i D$ не локально нильпотентно, но локально конечно, а для дифференцирования $x_i^2 D$ не выполнено даже условие локальной конечности, так как $\dim\langle D^n x_i,\ n \in \mathbb{N}\rangle = \infty$.

Интересно задаться вопросом о существовании какой-либо естественной алгебраической структуры на множестве всех локально нильпотентных дифференцирований данной алгебры. А именно, является ли $\mathrm{LND}(A)$ алгеброй Ли или A-модулем, как это было для множества всех дифференцирований $\mathrm{Der}(A)$? Ответ на этот вопрос отрицательный. Как мы уже видели, для $D = \frac{\partial}{\partial x}$ дифференцирование xD уже не локально нильпотентно. Кроме того, сумма и коммутатор двух локально нильпотентных дифференцирований уже не обязан быть таковым. Как пример достаточно рассмотреть $D_1 = x\frac{\partial}{\partial y},\ D_2 = y\frac{\partial}{\partial x} \in \mathrm{LND}(\mathbb{K}[x, y])$.

1.2 Степенные функции.

Определение 3. *Степенной функцией* на алгебре A называется отображение $\deg :\ A \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{-\infty\}$ такое, что для любых $f, g \in A$ выполнено:

1. $\deg f = -\infty \Leftrightarrow f = 0$;
2. $\deg (fg) = deg\, f + \deg g$;
3. $\deg (f + g) \leqslant \max\{\deg f, \deg g\}$.

Определение 4. Подмножество B алгебры A называется *факториально замкнутым*, если для любых ненулевых элементов $f, g \in A$ условие $fg \in B$ влечет $f, g \in B$.

Отметим следующие элементарные, но ключевые следствия этих определений. Во-первых, множество элементов неположительной степени

$$A_0 = \{a \in A \mid \deg a \leqslant 0\}$$

— факториально замкнутое в A подкольцо. Во-вторых, множество обратимых элементов алгебры A содержится в A_0: $A^* \subseteq A_0$. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть произвольный обратимый элемент $f \in A^*$, равенство $ff^{-1} = 1$ и воспользоваться факториальной замкнутостью A_0 в A.

С любым локально нильпотентным дифференцированием D можно связать функцию $\nu_D :\ A \to A$ следующего вида:

$$\nu_D(f) = \begin{cases} -\infty, & f = 0, \\ \min\{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \mid D^{n+1} f = 0\}, & f \neq 0. \end{cases}$$

Предложение 1. *ν_D — степенная функция.*

Доказательство. Для доказательства рассмотрим произвольные ненулевые элементы f, g алгебры A. Введем следующие обозначения: $m = \nu_D(f),\ n = \nu_D(g),\ \mu = \max\{m, n\}$. Тогда

$$D^{\mu+1}(f+g) = D^{\mu+1}f + D^{\mu+1}g = 0 \ \Rightarrow\ \nu_D(f+g) \leqslant \mu.$$

Кроме того,

$$D^{m+n+1}(fg) = \sum_{i+j=m+n+1} \binom{m+n+1}{i} D^i f D^j g = 0,$$

так как в каждом слагаемом либо $i > m$, либо $j > n$. В свою очередь

$$D^{m+n}(fg) = \binom{m+n}{n} D^m f D^n g \neq 0,$$

так как A не содержит делителей нуля. Следовательно, $\nu_D(fg) = m + n$. □

Таким образом доказано, что построенная функция ν_D является степенной, что позволяет нам говорить о *степени* элемента относительно данного дифференцирования D. Непосредственным следствием предложения 1 является утверждение о том, что локальную нильпотентность дифференцирования достаточно проверять на образующих:

Следствие. *Пусть $a_i, i \in I$ — порождающие алгебры A. Тогда $D \in \mathrm{Der}(A)$ локально нильпотентно тогда и только тогда, когда для любого $i \in I$ существует такое натуральное n_i, что $D^{n_i} a_i = 0$.*

1.3 Основные свойства локально нильпотентных дифференцирований.

Предложение 2. *Пусть $D \in \mathrm{LND}(A)$. Тогда:*

1. $\mathrm{Ker}\, D = \{a \in A \mid Da = 0\}$ *— факториально замкнуто в A;*

2. $A^* \subseteq \mathrm{Ker}\, D$, *в частности, условие $D(\lambda) = 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$ — избыточно;*

3. *если $D \neq 0$, то в A найдется локальный слайс относительно D, т.е. такой $s \in A$, что $Ds \neq 0$, а $D^2 s = 0$.*

Следствие. *Если K — поле нулевой характеристики, то* $\mathrm{LND}(K) = \{0\}$.

Доказательство. Для доказательства пунктов 1 и 2 предложения отметим, что $\mathrm{Ker}\, D = \{a \in A \mid \nu_D(a) \leqslant 0\} = A_0$. Факториальная замкнутость A_0 в A и включение $A^* \subseteq A_0$ были проверены выше для произвольных степенных функций. Проверим наличие локального слайса у дифференцирования D. Пусть $p \in A \setminus \mathrm{Ker}\, D$, положим $d = \nu_D(p) \geqslant 1$. Тогда $s = D^{d-1}p$ — локальный слайс относительно D. □

Отметим, что для дифференцирований, не являющихся локально нильпотентными, ни одно из заключений предложения 2, вообще говоря, не выполнено. Приведем соответствующие контрпримеры.

1. Рассмотрим $D = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} \in \mathrm{Der}(\mathbb{K}[x,y])$. Легко проверить, что $xy \in \mathrm{Ker}\, D$ тогда как $x, y \notin \mathrm{Ker}\, D$, то есть в данном случае ядро не факториально замкнуто в $\mathbb{K}[x,y]$.

2. Рассмотрим $D = \frac{\partial}{\partial x} \in \mathrm{Der}(\mathbb{K}[x])$ и продолжим это дифференцирование на поле рациональных функций $\mathbb{K}(x)$. Ясно, что $x \in \mathbb{K}(x)$ обратим, но x не лежит в ядре дифференцирования D.

3. Дифференцирование $D = x\frac{\partial}{\partial x} \in \mathrm{Der}(\mathbb{K}[x])$ не имеет локального слайса.

Внимательный читатель заметил, что контрпример к пункту 2 предложения 2 содержит пока лишь интуитивно ясное понятие, а именно понятие продолжения дифференцирования алгебры на ее поле частных. Следующее предложение дает формальное объяснение возможности такого продолжения.

Предложение 3. *Пусть $D \in \mathrm{Der}(A)$. Тогда существует и единственное продолжение дифференцирования D до дифференцирования на поле частных QA алгебры A, то есть такое $\tilde{D} \in \mathrm{Der}(QA)$, что $\tilde{D}|_A = D$.*

Доказательство. Согласно определению, $QA = \{(a,b) \mid a, b \in A,\ b \neq 0\}/\sim$, где $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$. Отметим, что

$$0 = D(1) = D\left(\frac{a}{a}\right) = D(a)\frac{1}{a} + aD\left(\frac{1}{a}\right) \ \Rightarrow\ D\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{D(a)}{a^2}.$$

Следовательно,

$$D\left(\frac{a}{b}\right) = a\left(-\frac{D(b)}{b^2}\right) + D(a)\frac{1}{b} = \frac{bD(a) - aD(b)}{b^2},$$

то есть продолжение единственно. Проверим корректность заданного таким образом продолжения. Пусть $(a,b) \sim (c,d)$. Это значит, что $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$. Поэтому достаточно проверить корректность для эквивалентных пар вида $(a,b) \sim (ac,bc)$. Действительно, имеем:

$$D\left(\frac{ac}{bc}\right) = \frac{D(ac)bc - acD(bc)}{(bc)^2} = \frac{(D(a)c + aD(c))bc - ac(D(b)c + bD(c))}{(bc)^2} =$$
$$= \frac{D(a)bc^2 + abcD(c) - ac^2D(b) - abcD(c)}{(bc)^2} = \frac{D(a)b - aD(b)}{b^2} = D\left(\frac{a}{b}\right).$$

□

Предложение 4. *Пусть $D \in \mathrm{LND}(A)$, $f_1, \ldots, f_n \in A$, $n \geqslant 1$. Пусть также найдется такая перестановка $\sigma \in S_n$, что $Df_i \in f_{\sigma(i)}A$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Тогда в каждой орбите σ существует i т.ч. $Df_i = 0$.*

Доказательство. Разложим перестановку σ в произведение независимых циклов и сведем тем самым задачу к рассмотрению циклической перестановки σ. Предположим, $Df_i \neq 0$ ни для какого i. Выберем $a_1, \ldots, a_n \neq 0$ т.ч. $Df_i = a_i f_{\sigma(i)}$. Исходя из определения и свойств степенной функции ν_D, получим:

$$\nu_D(f_i) - 1 = \nu_D(Df_i) = \nu_D(a_i f_{\sigma(i)}) = \nu_D(a_i) + \nu_D(f_{\sigma(i)}) \geqslant \nu_D(f_{\sigma(i)}).$$

Суммируя эти неравенства по $i = 1, \ldots, n$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_D(f_i) - n \geqslant \sum_{i=1}^{n} \nu_D(f_{\sigma(i)}),$$

что невозможно, так как суммы по разные стороны неравенства совпадают. □

Особенно стоит отметить случай, когда $n = 1$.

Следствие. *Пусть $D \in \mathrm{LND}(A)$ и $Df \in fA$ для некоторого $f \in A$. Тогда $Df = 0$.*

Следующие два предложения позволяют конструировать новые локально нильпотентные дифференцирования из уже имеющихся.

Предложение 5. *Пусть $D_1, D_2 \in \mathrm{LND}(A)$ и $[D_1, D_2] = 0$. Тогда $D_1 + D_2 \in \mathrm{LND}(A)$.*

Доказательство. По условию дифференцирования D_1 и D_2 коммутируют. Рассмотрим произвольный элемент $a \in A$ и положим $N = \nu_{D_1}(a) + \nu_{D_2}(a) + 1$. Тогда

$$(D_1 + D_2)^N(a) = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} D_1^i(a) D_2^{N-i}(a) = 0,$$

то есть $D_1 + D_2 \in \mathrm{LND}(A)$. □

Предложение 6. *Пусть $D \in \mathrm{Der}(A)$, $f \in A$ — ненулевой элемент. Тогда*

$$fD \in \mathrm{LND}(A) \ \Leftrightarrow\ D \in \mathrm{LND}(A) \text{ и } f \in \mathrm{Ker}\, D.$$

Доказательство. Пусть $fD \in \mathrm{LND}(A)$, но $D \notin \mathrm{LND}(A)$. Значит, существует $g \in A$ т.ч. никакая степень дифференцирования D его не обнуляет. Обозначим $\nu_{fD}(f) \geqslant 0$. С одной стороны,

$$\nu_{fD}(fD^n g) = \nu_{fD}((fD)(D^{n-1}g)) = \nu_{fD}(D^{n-1}g) - 1.$$

С другой стороны,

$$\nu_{fD}(fD^n g) = \nu_{fD}(f) + \nu_{fD}(D^n g) = N + \nu_{fD}(D^n g).$$

Сравнивая два этих равенства, получаем:

$$\nu_{fD}(D^n g) = \nu_{fD}(D^{n-1}g) - (N+1),\ \forall n \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\nu_{fD}(D^n g) = \nu_{fD}(g) - n(N+1),$$

что невозможно, так как ν_D не принимает значений в отрицательных целых числах. Таким образом доказано, что $D \in \mathrm{LND}(A)$. Теперь отметим, что $(fD)(f) \in fA$, а значит, по следствию из предложения 4 имеем: $f \in \mathrm{Ker}\, fD = \mathrm{Ker}\, D$.

Обратная импликация тривиальна. □

Для алгебр с делителями нуля утверждение предложения 6 неверно.

Пример 3. Рассмотрим $A = \mathbb{K}[x]/(x^3)$. Пусть $\pi : \mathbb{K}[x] \to A$ — естественный сюръективный гомоморфизм алгебр. Обозначим $\bar{x} = \pi(x)$ и рассмотрим дифференцирование $D \in \mathrm{Der}(A)$, задаваемое формулой $D = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}$. Легко проверить, что D и $\bar{x}^2 D$ локально нильпотентны, однако $\bar{x}^2 \notin \mathrm{Ker}\, D$.

Упражнение 3. Пусть A — коммутативная $\mathbb{K}$-алгебра без делителей нуля, $D \in \mathrm{LND}(A)$. Пусть D продолжается до дифференцирования $D^* \in \mathrm{Der}(A[t])$. Тогда $D^* \in \mathrm{LND}(A[t])$ тогда и только тогда, когда $D^* t \in A$.

1.4 Экспоненциальное отображение.

Пусть $D \in \mathrm{LND}(A)$. Тогда отображение $\exp D : A \to A$, задаваемое формулой

$$(\exp D)(f) = \sum_{i \geqslant 0} \frac{1}{i!} D^i f,$$

называется *экспоненциальным отображением.*

Предложение 7. *Пусть* $D \in \mathrm{LND}(A)$. *Тогда:*

1. $\exp D \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$*;*
2. *если* $[D, E] = 0$ *для некоторого* $E \in \mathrm{LND}(A)$*, то* $D + E \in \mathrm{LND}(A)$ *и*

$$\exp(D + E) = \exp D \circ \exp E;$$

3. *подгруппа в* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$*, порожденная* $\{\exp D \mid D \in \mathrm{LND}(A)\}$ *— нормальна.*

Доказательство. Очевидно, что $\exp D$ уважает сложение. Проверим, что оно уважает умножение. Пусть f, g — ненулевые элементы, $\nu_D(f) = m$, $\nu_D(g) = n$. Тогда

$$\begin{aligned}(\exp D)(f)(\exp D)(g) &= \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} D^i f\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{j!} D^j g\right) = \\ &= \sum_{i+j=0}^{m+n} \frac{1}{(i+j)!}\binom{i+j}{j} D^i f D^j g = \sum_{t=0}^{m+n} \frac{1}{t!}\left(\sum_{i+j=t}\binom{i+j}{j} D^i f D^j g\right) = \\ &= \sum_{t=0}^{m+n} \frac{1}{t!} D^t(fg) = (\exp D)(fg),\end{aligned}$$

следовательно, $\exp D$ — гомоморфизм алгебр.

Доказательство равенства из пункта 2 может быть получено с помощью аналогичных вычислений, а локальная нильпотентность суммы для коммутирующих ЛНД уже была проверена нами в предложении 5. Теперь легко проверить, что $\exp D$ является автоморфизмом алгебры A. А именно, при $D \in \mathrm{LND}(A)$ имеем $-D \in \mathrm{LND}(A)$ и $[D, -D] = 0$. Следовательно,

$$\exp D \circ \exp(-D) = \exp(-D) \circ \exp D = \exp(0) = I.$$

Для доказательства пункта 3 рассмотрим произвольный $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(A)$. Легко проверить, что $\alpha D \alpha^{-1}$ — локально нильпотентное дифференцирование. Также заметим, что

$$\alpha(\exp D)\alpha^{-1} = \exp(\alpha D \alpha^{-1}),$$

что означает нормальность группы, порожденной экспоненциальными отображениями. $\square$

1.5 Отображение Диксмье и теорема о слайсе.

Определение 5. Пусть $S \subset A\backslash\{0\}$ — замкнутое относительно умножения подмножество. *Локализацией A по S* называется подалгебра

$$S^{-1}A = \{as^{-1} \in QA \mid a \in A, s \in S\} \subset QA.$$

В случае $S = \{f^i\}_{i\geqslant 0}$ будем говорить о *локализации A по f* и использовать обозначение $A_f := S^{-1}A$.

Пусть $D \in \mathrm{LND}(A)$, $r \in A$ — локальный слайс для D, т.е. такой $r \in A$, что $Dr \neq 0$, а $D^2r = 0$. Тогда отображение $\pi_r : A \to A_{Dr}$, задаваемое формулой

$$\pi_r(f) = \sum_{i\geqslant 0} \frac{(-1)^i}{i!} D^i f \frac{r^i}{(Dr)^i},$$

называется *отображением Диксмье.*

Теорема 1. *Пусть $D \in \mathrm{LND}(A)$, $D \neq 0$. Обозначим $B = \operatorname{Ker} D$. Пусть $r \in A$ — локальный слайс относительно D, $\pi_r : A \to A_{Dr}$ — соответствующее отображение Диксмье. Тогда:*

1. $\pi_r(A) \subset B_{Dr}$*;*
2. π_r *— гомоморфизм $\mathbb{K}$-алгебр;*
3. $\operatorname{Ker} \pi_r = rA_{Dr} \cap A$*;*
4. $A_{Dr} = B_{Dr}[r]$*;*
5. $\mathrm{tr.deg}_B\, A = 1$*.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $Ds = 1$ для некоторого $s \in A$. Такой элемент будем называть *слайсом.*

1. По определению
$$\pi_s(h) = \sum_{i\geqslant 0} \frac{(-1)^i}{i!} D^i f s^i.$$
Отсюда непосредственно следует, что $D(\pi_s(h)) = 0$ для любого $h \in A$. Следовательно, $\pi_s(A) \subset B = B_{Ds}$.

2. Пусть t — трансцендентный над A элемент. Положив $Dt = 0$, продолжим D на $A[t]$. Пусть $\iota : A \hookrightarrow A[t]$ — вложение, $\epsilon : A[t] \to A$ — вычисление в $t = s$. По предложению 7 $exp(-tD)$ является автоморфизмом на $A[t]$. Кроме того, $\pi_s = \epsilon \circ \exp(-tD) \circ \iota$. Следовательно, π_s — гомоморфизм.

3. Требуется проверить, что $\operatorname{Ker} \pi_s = sA_{Ds} \cap A = sA \cap A = sA$. Так как $\pi_s(s) = s - (Ds)s = 0$, имеем $sA \subset \operatorname{Ker} \pi_s$. Обратно, если $\pi_s(f) = 0 = f + sa$ для некоторого $a \in A$, то $f \in sA$ и $\operatorname{Ker} \pi_s = sA$.

4. Так как ядро D на $A[t]$ совпадает с $B[t]$, π_s продолжается до гомоморфизма $\pi_s: A[t] \to B[t]$. Определим гомоморфизм $\phi: A \to B[s]$ как композицию $\phi = \epsilon \circ \pi_s \circ \exp(tD) \circ \iota$, т.е.
$$\phi(g) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\pi_s(D^n g)s^n.$$
Заметим, что ϕ является сюръекцией, так как $\phi(b) = b$ для любого $b \in B$ и $\phi(s) = s$. Докажем, что ϕ инъективен. Если $\phi(g) = 0$, то все коэффициенты $\phi(g) \in A[s]$ равны нулю: $\frac{1}{n!}\pi_s(D^n g) = 0\ \forall n$. Обозначим $N = \nu_D(g)$, $N \geqslant 0$ при $g \neq 0$. Тогда $D^N g \in \operatorname{Ker}\pi_s = sA$ и $D^N g \in B\backslash\{0\}$. Вследствие факториальной замкнутости B имеем $s \in B$. Противоречие. Следовательно, ϕ — изоморфизм: $A \simeq B[s]$.

Перейдем к рассмотрению общего случая: $Dr = f \in B$, $f \neq 0$. Обозначим через D_f продолжение D на A_f. Непосредственно проверяется, что $s := \frac{r}{f}$ — слайс для для D_f. Из определения отображения Диксмье видно, что π_r является ограничением π_s на A. Таким образом, π_r — гомоморфизм. Следующие три строки доказывают пункты 1, 3, 4 соответственно:
$$\pi_r(A) = \pi_s(A_f) \cap A_f \subset B_f \cap A_f = B_f;$$
$$\operatorname{Ker}\pi_r = \operatorname{Ker}\pi_s \cap A = sA_f \cap A = rA_f \cap A;$$
$$A_f = B_f[s] = B_f[r].$$
Пункт 5 является непосредственным следствием пункта 4. □

Следствие. *(теорема о слайсе) Путь $D \in \operatorname{LND}(A)$ допускает слайс $s \in A$, $B := \operatorname{Ker} D$. Тогда $A = B[s]$ и $D = \frac{\partial}{\partial s}$.*

Упражнение 4. Привести пример такого дифференцирования $D \in \operatorname{Der}(\mathbb{K}[x, y])$, что $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}$. (Так как $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x, y]{=}2$, то такое дифференцирование не может быть локально нильпотентным.)

Упражнение 5. Пусть $D, E \in \operatorname{LND}(A)$ таковы, что $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} E =: B$. Докажите, что найдутся такие $a, b \in B$, что $aD = bE$.

2 Аффинная алгебраическая геометрия

2.1 Аффинные алгебраическое многообразия.

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль, $\mathbb{A}^n$ — аффинное пространство над $\mathbb{K}$. Пусть также $x_1, \ldots, x_n$ — координатные функции на $\mathbb{A}^n$, $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — алгебра многочленов на $\mathbb{A}^n$.

Определение 6. Пусть $S \subset \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$. Тогда S задает *аффинное алгебраическое многообразие X*:
$$X = \mathbb{V}(S) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0\ \forall f \in S\}.$$
Заметим, что для идеала $I = (S) \lhd \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$ аффинные многообразия, задаваемые S и I, совпадают: $\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(I)$.

Определение 7. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$ — аффинные алгебраические многообразия. Отображение $\varphi: X \to Y$ называется *морфизмом*, если $\varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, где $f_i \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$.

Абстрактное аффинное алгебраическое многообразие — аффинное многообразие, рассматриваемое с точностью до изоморфизма.

Пример 4.

1. Рассмотрим аффинную прямую $X = \mathbb{A}^1$ и параболу $Y = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid y = x^2\}$. Предъявим изоморфизм $\varphi : X \to Y$ этих многообразий: $\varphi(t) = (t, t^2)$. Обратный ему морфизм задается формулой: $\varphi^{-1}(x, y) = x$.

2. Пусть, по-прежнему, $X = \mathbb{A}^1$, а $Z = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid y^2 = x^3\}$ — полукубическая парабола. Мы предъявим пример биективного морфизма $\varphi : X \to Z$, не являющегося изоморфизмом. Зададим его по формуле: $\varphi(t) = (t^2, t^3)$. Обратное отображение должно переводить точку с координатами (t^2, t^3) в точку аффинной прямой с координатой t и, таким образом, не может быть задано полиномом от координат.

Определение 8. *Регулярными функциями* на $X \subset \mathbb{A}^n$ называются ограничения на X многочленов от координат. Регулярные функции образуют конечно порожденную алгебру

$$\mathbb{K}[X] \simeq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/\mathbb{I}(X),$$

где $\mathbb{I}(X)$ — идеал всех функций, обнуляющихся на X. Алгебру регулярных функций принято также называть *координатной алгеброй* многообразия X.

Пример 5. Рассмотрим $X = \mathbb{V}(t^2) \subset \mathbb{A}^1$. Тогда $\mathbb{I}(X) = (t) \lhd \mathbb{K}[t]$.

Упражнение 6. Доказать, что $\mathbb{K}[Z] \simeq \mathbb{K}[x, y]/(x^3 - y^2)$, где Z — рассмотренная выше полукубическая парабола.

На аффинных алгебраических многообразиях можно рассмотреть так называемую *топологию Зарисского.* Согласно определению, замкнутыми подмножествами в $\mathbb{A}^n$ называются аффинные многообразия. Топология на $X \subseteq \mathbb{A}^n$ определяется как индуцированная с $\mathbb{A}^n$. Заметим, что регулярные функции и морфизмы непрерывны в топологии Зарисского.

Базу топологии Зарисского на X составляют *главные открытые подмножества* $X_h = \{x \in X \mid h(x) \neq 0\}$, где $h \in \mathbb{K}[X]$. Главное открытое подмножество можно наделить структурой аффинного алгебраического многообразия. А именно, если $X \subseteq \mathbb{A}^n$ и $\mathbb{I}(X) = (f_1, \ldots, f_s)$, то X_h вкладывается в $\mathbb{A}^{n+1}$ как множество нулей идеала $\mathbb{I}(X_h) = (f_1, \ldots, f_s, 1 - th)$. Кроме того, $\mathbb{K}[X_h] = \mathbb{K}[X][\frac{1}{h}]$.

2.2 Двойственность между аффинными многообразиями и их координатными алгебрами.

1) Точки $X \overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ гомоморфизмы $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$.

Сопоставим $x \in X$ гомоморфизм вычисления значения функции в точке x:

$$\chi_x(f) = f(x).$$

Обратно, гомоморфизму $\chi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ сопоставим точку

$$x = (\chi(x_1), \ldots, \chi(x_n)) \in X.$$

Проверим корректность. Если $f \in \mathbb{I}(X)$, то по определению $f(x) = 0$ для любого $x \in X$. Следовательно, χ_x определен на факторалгебре $\mathbb{K}[X]$. Обратно, возьмем произвольную $f \in \mathbb{I}(X)$. Тогда $\chi(f) = 0$. Так как $\chi = \chi_x$, то $f(x) = 0$, а значит, $x \in X$.

2) Морфизмы $\varphi : X \to Y \overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ гомоморфизмы $\varphi^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$.

Сопоставим морфизму $\varphi : X \to Y$ гомоморфизм φ^* их координатных алгебр в обратную сторону, т.ч.

$$(\varphi^* f)(x) = f(\varphi(x)).$$

Обратно, гомоморфизму $\psi : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$ поставим в соответствие морфизм $\varphi : X \to Y$ т.ч.

$$\varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)),\ \ f_i = \psi(y_i).$$

Проверим, что $\psi = \varphi^*$. Достаточно выполнить проверку на образующих y_i алгебры $\mathbb{K}[Y]$. Действительно, $\varphi^*(y_i)(x) = y_i(\varphi(x)) = f_i(x) = \psi(y_i)(x)$.

При этом выполнено свойство функториальности: $(\varphi_1 \circ \varphi_2)^* = \varphi_2^* \circ \varphi_1^*$. Таким образом, φ — изоморфизм тогда и только тогда, когда φ^* — изоморфизм. В качестве следствия получаем, что $\mathbb{K}[X]$ не зависит от вложения $X \subseteq \mathbb{A}^n$.

Упражнение 7. Доказать, что полукубическая парабола $Z = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid y^2 = x^3\}$ не изоморфна аффинной прямой.

Итак, мы сопоставили аффинному алгебраическому многообразию X конечно порожденную алгебру $\mathbb{K}[X]$. Приведем обратное соответствие. Пусть имеется конечно порожденная алгебра A. Сопоставим ей множество $\operatorname{Spec} A$ всех гомоморфизмов $\chi : A \to \mathbb{K}$.

Предложение 8. *Пусть $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I$ для некоторого идеала $I \lhd \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Тогда $\operatorname{Spec} A \simeq \mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^n$.*

Доказательство. Заметим, что задание $\chi : A \to \mathbb{K}$ равносильно заданию гомоморфизма $\chi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}$, т.ч. $\chi(I) = 0$. Если $\chi(x_i) = z_i \in \mathbb{K}$, то $\chi = \chi_{z=(z_1,\ldots,z_n)}$ и $z \in \mathbb{V}(I)$. □

3) Вложение X в аффинное пространство определяется выбором конечной системы порождающих в координатной алгебре.

Подведем итог: абстрактные аффинные многообразия реализуются как спектры конечно порожденных алгебр. Легко видеть, что координатная алгебра аффинного многообразия с необходимостью конечно порождена и не имеет нильпотентов. Оказывается, что это условие является и достаточным.

Определение 9. Пусть $I \lhd A$. Идеал $\sqrt{I} = \{f \in A \mid \exists k \in \mathbb{N} :\ \ f^k \in I\}$ называется *радикалом I*.

Теорема. *(теорема Гильберта о нулях) Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнуто, $X \subseteq \mathbb{A}^n$ — алгебраическое многообразие, заданное идеалом $I \lhd \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Тогда $\mathbb{I}(X) = \sqrt{I}$.*

Следствие. *Пусть $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$. Тогда A является координатной алгеброй некоторого аффинного многообразия тогда и только тогда, когда A конечно порождена и не имеет нильпотентов.*

Упражнение 8. Привести контрпример к теореме Гильберта о нулях в случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.3 Прямые произведения.

Предложение 9. *Пусть $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ — аффинные многообразия. Тогда $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{m+n}$ также является аффинным алгебраическим многообразием.*

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_k)$, $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, а $Y = \mathbb{V}(g_1, \ldots, g_l)$, $g_j \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]$. Легко понять, что $X \times Y$ задается системой полиномиальных уравнений, а именно, $X \times Y = \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l)$, $f_i, g_j \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$. □

Предложение 10. $\mathbb{K}[X \times Y] \simeq \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$. *Таким образом, структура аффинного многообразия $X \times Y$ не зависит от вложений $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$.*

Доказательство. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм $\varphi : \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X \times Y]$, т.ч. $\varphi(p \otimes q)(x, y) = p(x)q(y)$. Проверим, что φ — изоморфизм.

Пусть $\{p_i\}$ — базис $\mathbb{K}[X]$, $\{q_j\}$ — базис $\mathbb{K}[Y]$. Следовательно, $\{p_i \otimes q_j\}$ — базис $\mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[Y]$. Достаточно показать, что функции $f_{ij} = \varphi(p_i \otimes q_j)$ линейно независимы. От противного: пусть найдутся $c_{i,j} \in \mathbb{K}$, т.ч. $\sum_{i,j} c_{ij} p_i(x) q_j(y) = 0$ для любого $x \in X$, $y \in Y$. Тогда для любого фиксированного $x \in X$ выполнено: $\sum_j (\sum_i c_{ij} p_i(x)) q_j = 0$ на Y. Так как $\{q_j\}$ — базис $\mathbb{K}[Y]$, то для любого j имеем $\sum_i c_{ij} p_i = 0$ на X. Применяя то, что $\{p_i\}$ — базис $\mathbb{K}[X]$, получаем требуемое: $c_{ij} = 0$ для всех i, j. □

2.4 Алгебраические группы.

Определение 10. *Алгебраическая группа G* — это группа + алгебраическое многообразие, т.ч. групповые операции умножения и инверсии

$$\mu : G \times G \to G, \qquad (g, h) \mapsto gh,$$

$$\iota : G \to G, \qquad g \mapsto g^{-1},$$

являются морфизмами.

Пример 6. Следующие группы являются алгебраическими:

1. Аддитивная группа поля $(\mathbb{K}, +)$ (как многообразие — аффинная прямая $\mathbb{A}^1$);

2. Мультипликативная группа поля $(\mathbb{K}^\times, \cdot)$ (как многообразие — аффинная прямая без нуля);

3. Группа невырожденных $n \times n$-матриц $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (как многообразие — главное открытое подмножество в $\mathbb{A}^{n^2}$, задаваемое неравенством $\det \neq 0$).

4. Прямое произведение алгебраически групп — алгебраическая группа. В частности, $\mathbb{K}^n$, $(\mathbb{K}^\times)^n$ — алгебраические группы.

Определение 11. *Действие алгебраической группы G на алгебраическом многообразии X* — такое действие $G \curvearrowright X$, что отображение действия

$$\alpha : G \times X \to X, \qquad (g, x) \mapsto g \cdot x,$$

— морфизм.

Действие $G \curvearrowright X$ индуцирует действие G на алгебре регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ по правилу:

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x).$$

Предложение 11. $\mathbb{K}[X]$ — *объединение конечномерных G-инвариантных подпространств, в которых G действует алгебраически, т.е. $\mathbb{K}[X]$ — рациональный G-модуль.*

Доказательство. Сопоставим естественным образом морфизму $\alpha : g \times X \to X$ гомоморфизм $\alpha^* : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[X]$.

Пусть $f \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha^*(f) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes q_i$, где $p_i \in \mathbb{K}[G]$, $q_i \in \mathbb{K}[X]$. По определению, $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x) = \sum_{i=1}^n p_i(g^{-1}) q_i(x)$. Следовательно,

$$g \cdot f = \sum_{i=1}^{n} p_i(g^{-1}) q_i.$$

Таким образом, $M = \langle g \cdot f \mid g \in G \rangle \subseteq \langle q_1, \ldots, q_n \rangle$, и, следовательно, $\dim M < \infty$.

Можно считать, что $q_1, \ldots, q_n$ — базис M. Так как $g \cdot q_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}(g^{-1}) q_i$, где $p_{ij} \in \mathbb{K}[G]$, действие G на M алгебраично. $\square$