Автоморфизмы алгебры $k[x, y]$ и локально нильпотентные дифференцирования этой алгебры.

Всё последующее следует книге Arno van den Essen "Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture".

Рассмотрим два класса автоморфизмов алгебры $k[x, y]$:

1. невырожденные линейные преобразования пространства $\langle x, y\rangle$;

2. Преобразования вида $X = x$, $Y = y + f(x)$.

Автоморфизм, получающийся композицией несколькиз автоморфизмов данного вида будем называть ручным.

Теорема. *(Jung — van der Kulk) Все автоморфизмы алгебры $k[x, y]$ ручные.*

Эту теорему будем доказывать при помощи следующего утверждения о локально нильпотентных дифференцированиях.

Теорема. *(Rentschler) Пусть D — ненулевое локально нильпотентное дифференцирование алгебры $k[x, y]$. Тогда существует такой ручной автоморфизм h и многочлен $f \in k[y]$, что $h^{-1}Dh = f(y)\partial_x$*

Выведем отсюда, что любой автоморфизм $k[x, y]$ ручной. Рассмотрим автоморфизм и пусть он переводит x в X и y в Y. Тогда дифференцирование $\frac{\partial}{\partial X}$ локально нильпотентно, а значит существует ручной автоморфизм h и многочлен $f(y)$, что $h^{-1}\frac{\partial}{\partial X}h = f(y)\partial_x$. Но для $g \in k[x, y]$ будет выполнено $h^{-1}\frac{\partial}{\partial X}h(g) = 0$ тогда и только тогда, когда $h(g) \in \operatorname{Ker}\frac{\partial}{\partial X} = k[Y]$, то есть $\operatorname{Ker} h^{-1}\frac{\partial}{\partial X}h = k[h^{-1}Y]$. С другой же стороны, $f(y)\partial_x = k[y]$, то есть $h^{-1}Y = cy + d$ для некоторых $c \in k^*, d \in k$, то есть $Y = ch(y) + d$.

Теперь заметим, что $(h^{-1}\frac{\partial}{\partial X}h)(h^{-1}(X)) = 1$, то есть $f(y)\partial_x(h^{-1}X) = 1$, откуда $\partial_x(h^{-1}X) \in k^*$. Получается, что $X = c'h(X) + d'(h(Y))$.

В конечном итоге имеем: $(X, Y) = (c'h(x) + d'(h(y)), ch(x) + d)$, откуда следует, что автоморфизм F также ручной. Что и требовалось.

На алгебре $k[x_1, \ldots, x_n]$ каждому ненулевому вектору $w \in \mathbb{Z}^n$ соответсвует w -градуировка, в которой моном с вектором степеней s принадлежит компоненте веса $\langle s, w\rangle$. Заметим, что любое дифференцирование в любой такой градуировке однозначно раскладывается в сумму однородных компонент. Кроме того, из локальной нильпотентности этого дифференцирования следуют локальная нильпотентность старшего и младшего членов в этой градуировке.

Лемма. *Пусть D — дифференцирование на кольце градуированном $\mathbb{Z}$, и $\widetilde{D}$ — старший член в разложении D на однородные компоненты. Если $\widetilde{D}$ однороден в градуировке $\mathbb{Z}^n$ и имеет там степень $(s_1, \ldots, s_n)$ с $s_i \geqslant 0$, то D не локально нильпотентно.*

Доказательство. Тривиальным образом проверяется ненильпотентность $\widetilde{D}$, откуда утверждение леммы следует, так как локальная нильпотентность D влекла бы локальную нильпотентность $\widetilde{D}$. □

Далее мы все время рассматриваем кольцо $k[x, y]$. Через $\operatorname{supp} D$ будем обозначать носитель D — координаты ненулевых компонент D в $\mathbb{Z}^2$ градуировке.

Лемма. *Пусть D локально нильпотентно. Тогда выполнено одно из трех утверждений:*

1. *$D = f(x)\partial_y$;*

2. *$D = f(y)\partial_x$;*

3. *Существуют такие $s_0, t_0 \geqslant 0$, что $(s_0, -1), (-1, t_0) \in \operatorname{supp} D$. Кроме того, в этом случае $\operatorname{supp} D$ содержится в треугольнике с вершинами $(-1,-1), (s_0,-1), (-1,t_0)$.*

Доказательство. Пусть p — полная степень D. Случай $p = -1$ очевиден. Тогда через l обозначим прямую $s + t = p$. Имеется следующие случаи:

1. l содержит точку вида $(-1, t_0)$. По определению l все точки $\operatorname{supp} D$ лежат не выше неё. Будем поворачивать l вокруг $(-1, t_0)$ по часовой стрелке до попадания туда хотя бы ещё одной точки из $\operatorname{supp} D$. Если этого попадания не случилось до совпадения с осью ординат, то мы получили первый случай из формулировки. Пусть мы встретили точку $(s_1, t_1) \in \operatorname{supp} D$ и $s \geqslant 0$.Из таких точек возьмем ту, у которой вторая координата минимальна (её и обозначим через (s_1, t_1)). Достаточно показать, что $t_1 = -1$ — тогда мы попадем в третий случай из формулировки. Если же $t_1 > -1$, то повернем l по часовой стрелке на малый угол так, чтобы получить прямую l' такую, чтобы $l' \cap \operatorname{supp} D = \{(s_1, t_1)\}$, а остальные точки $\operatorname{supp} D$ лежали бы под этой прямой. Получим градуировку, противоречащую локальной нильпотентности.

2. l содержит точку вида $(s_0, -1)$. Аналогично.

3. l содержит точки только с неотрицательными координатами. Тогда возьмем из них ту, у которой вторая минимальна и придем к противоречию аналогично первому случаю.

□

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы.

Доказательство. Рассмотрим локально нильпотентное дифференцирование D. Если оно попадает в первый или второй случай в формулировке предыдущей леммы, то доказывать особо нечего. Пусть тогда точки $(s_0, -1)$ и $(-1, t_0)$ как в лемме. Будем доказыать утверждение индукцией по $s_0 + t_0$.

Рассмотрим прямую l, проходящую через эти две точки. Её уравнение имеет вид $(t_0 + 1)s + (s_0 + 1)t = p$, где $p = s_0 t_0 - 1$. Рассмотрим w -градуировку с векторм $w = (t_0 + 1, s_0 + 1)$. Пусть D_w — старший член в однородном разложении D. Тогда он локально нильпотентен. Представим его а виде $D_w = gD_1$, где $D_1 = a\partial_x + b\partial_y$ и a взаимно просто с b. Тогда D_1 — локально нильпотентное дифференцирование, а g лежит в его ядре. В силу w-однородности D_1, a, b и g также w-однородны. Нам хочется, чтобы либо $a(0) \neq 0$, либо $b(0) \neq 0$. Для этого отвлечемся на соответствующую лемму:

Лемма. *Пусть $D = a\partial_x + b\partial_y$ — локально нильпотентное дифференцирование, a и b взаимно просты. Тогда либо $a(0) \neq 0$, либо $b(0) \neq 0$.*

Доказательство. Докажем просто, что у D есть слайс. Предположим противное. Из локальных слайсов выберем локальный слайс p наименьшей полной степени. Пусть q — неприводимый делитель Dp. Тогда D продолжается на $k[x, y]/(q)$. Более того, в силу взаимной простоты a и b, продолжение не равно нулю. Эта алгебра имеет степень трансцендентности 1 и является областью целостности. Тогда ядро D на ней изоморфно k. Так как образ p просле факторизации по (q) попадает в ядро, получаем представление $p = \lambda + hq$ для некоторого многочлена h и скаляра λ. Применив к этому равенству D, получим $Dp = qDh$. Но тогда $Dh \in \operatorname{Ker} D$ и степень h меньше степени p. Противоречие.

□

Значит, $a(0) \neq 0$ или $b(0) \neq 0$. Для определенности будем считать, что $a(0) \neq 0$. Кроме того, в D_1 входит слагаемое вида $cx^r\partial_y$. Так как D_1 однородно, степени остальных слагаемых должны лежать на прямой, соединяющей точки $(-1, 0)$ и $(r, -1)$, но там просто нет больше точек. Стало быть, $D_1 = d\partial_x + cx^r\partial_y$, а ядро его имеет вид $k[dy - \frac{c}{r+1}x^{r+1}]$. Тогда в силу однородности g получаем $g = f\left(dy - \frac{c}{r+1}x^{r+1}\right)^m$.

Рассмотрим автоморфизм, переводящий X в x, а Y в $dy - \frac{c}{r+1}x^{r+1}$. После его применения D_w примет вид $fY^m\partial_X$, то есть t_0 не изменится. То, что раньше давало точку $(s_0, -1)$ войдет сюда, а занчит s_0 уменьшится. Таким образом, мы можем воспользоваться предположением индукции.

$\square$